1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki

W roku szkolnym 2012/2013 w całym kraju po raz kolejny został przeprowadzony egzamin maturalny dla absolwentów liceów ogólnokształcących (LO), techników (T), uzupełniających liceów ogólnokształcących (LU) i techników uzupełniających (TU).

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem zewnętrznym i ma formę pisemną. Egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot obowiązkowy był zdawany na poziomie podstawowym lub jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Egzamin na poziomie podstawowym trwał 170 minut, a na poziomie rozszerzonymi 180 minut i polegał na rozwiązaniu zawartych w jednym arkuszu egzaminacyjnym zadań egzaminacyjnych.

Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania za zadania z każdego arkusza wynosi 50.

W trakcie egzaminu zdający mógł korzystać z zestawu wybranych wzorów matematycznych przygotowanego przez CKE i kalkulatora z podstawowymi działaniami.

Wyniki egzaminu zamieszczone na świadectwie dojrzałości wyrażone są w skali procentowej.

2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2012/2013

Zgodnie z koncepcją i strukturą egzaminu maturalnego z matematyki zdający egzamin w tym roku musieli zdawać egzamin na poziomie podstawowym i mogli wybrać dodatkowo egzamin z matematyki, ale na poziomie rozszerzonym.

Arkusze zostały tak skonstruowane, aby zbadać stopień opanowania umiejętności określonych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Poziom trudności poszczególnych zadań był zróżnicowany i dostosowany do możliwości absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. Tematyka zadań dotyczyła większości treści zawartych w podstawie programowej matematyki. Zadania egzaminacyjne zawarte w arkuszach pozwalały sprawdzić znajomość i rozumienie podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz stosowanie ich do rozwiązywania problemów matematycznych. Sprawdzały też umiejętność korzystania i przetwarzania podanych informacji oraz umiejętność zastosowania tej wiedzy w praktyce z zakresu wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego. Zadania egzaminacyjne w arkuszu rozszerzonym w większym stopniu niż w arkuszu podstawowym sprawdzały umiejętność rozwiązywania problemów i podawania do nich opisu matematycznego w oparciu o treści obejmujące zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, umiejętność argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

ARKUSZ PODSTAWOWY

Arkusz podstawowy składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech) oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać). Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było 6 zadań dwupunktowych, 2 zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

ARKUSZ ROZSZERZONY

Arkusz dla poziomu rozszerzonego składał się z 12 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich były: jedno zadanie sześciopunktowe, dwa zadania pięciopunktowe, siedem zadań czteropunktowych i dwa zadania trzypunktowe.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.

3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki

W Tabeli 1. zamieszczono kartotekę arkusza podstawowego, w Tabeli 2. – kartotekę arkusza rozszerzonego. Kartoteki te zawierają informacje o sprawdzanych czynnościach, przyporządkowany im numer standardu, numer treści ze standardu I, których znajomością powinien wykazać się zdający, oraz numery zadań wraz z maksymalną liczbą punktów, które można było uzyskać za ich rozwiązanie.

Tabela 1. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom podstawowy

Nr zadania	Badana umiejętność *Zdający*:	Standard	Nr treści ze standardu	Typ zadania	Liczba punktów
1	wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\lvert x-a \rvert < b$	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	1) f)	Z	1
2	stosuje pojęcie procentu w obliczeniach	Modelowanie matematyczne	1) d)	Z	1
3	oblicza różnicę logarytmów	Wykorzystanie i tworzenie informacji	1) h)	Z	1
4	rozwiązuje układ równań liniowych	Wykorzystanie i tworzenie informacji	3) c)	Z	1

5	wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	4) g)	Z	1
6	odczytuje współrzędne wierzchołka paraboli z jej postaci kanonicznej	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	4) h)	Z	1
7	posługuje się wzorami skróconego mnożenia	Wykorzystanie i tworzenie informacji	2) a)	Z	1
8	bada prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	8) c)	Z	1
9	wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej, by określić położenie prostej w układzie współrzędnych	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	4) g)	Z	1
10	sprawdza, które z podanych liczb spełniają nierówność i wybiera z nich najmniejszą	Wykorzystanie i tworzenie informacji	3)	Z	1
11	na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f\left(x+a\right)$, $y=f\left(x-a\right)$, $y=f\left(x\right)+a$, $y=f\left(x\right)-a$	Wykorzystanie i tworzenie informacji	4) d)	Z	1
12	wykorzystuje własności ciągu geometrycznego	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	5) c)	Z	1
13	wyznacza pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	5) c)	Z	1
14	stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	6) c)	Z	1
15	korzysta ze związków między kątem środkowym a kątem wpisanym opartym na tym samym łuku	Wykorzystanie i tworzenie informacji	7) a)	Z	1
16	wykorzystuje pojęcie rozwiązania równania wielomianowego	Wykorzystanie i tworzenie informacji	3) d)	Z	1
17	oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie i obwód rombu	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	8) e)	Z	1
18	wykorzystuje współrzędne środka odcinka	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	8) f)	Z	1
19	posługuje się równaniem okręgu, odczytuje jego środek i oblicza odległość między środkami okręgów	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	8) g)	Z	1
20	wyznacza związki miarowe w graniastosłupie	Wykorzystanie i tworzenie informacji	9)	Z	1
21	wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	9) b)	Z	1
22	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa	Modelowanie matematyczne	10) d)	Z	1

23	wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych, oblicza pierwiastki	Wykorzystanie i tworzenie informacji	1) a)	Z	1
24	oblicza medianę uporządkowanego zestawu danych	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	10) a)	Z	1
25	oblicza objętość graniastosłupa z wykorzystaniem związków miarowych w graniastosłupie	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	9) b)	Z	1
26	rozwiązuje równanie wielomianowe metodą rozkładu na czynniki	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	3) d)	KO	2
27	oblicza wartość wyrażenia trygonometrycznego	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	6) c)	KO	2
28	przeprowadza dowód algebraiczny	Rozumowanie i argumentacja	2)	KO	2
29	odczytuje z wykresu funkcji zbiór wartości oraz przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości ujemne	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	4) b)	KO	2
30	rozwiązuje nierówność kwadratową	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	3) a)	KO	2
31	przeprowadza dowód algebraiczny	Rozumowanie i argumentacja	1) g)	KO	2
32	znajduje związki miarowe w figurach płaskich (oblicza kąty trójkąta ostrokątnego)	Użycie i tworzenie strategii	7) c)	RO	4
33	oblicza objętość wielościanu	Użycie i tworzenie strategii	9) b)	RO	4
34	rozwiązuje zadanie umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równań kwadratowych	Modelowanie matematyczne	3) b)	RO	5

Tabela 2. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom rozszerzony

Nr zadania	Badana umiejętność *Zdający*:	Standard	Nr treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	rozwiązuje nierówność z wartością bezwzględną	Użycie i tworzenie strategii	3) e)R	RO	4 pkt
2	przeprowadza dowód geometryczny	Rozumowanie i argumentacja	7) c)	RO	4 pkt
3	wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych	Użycie i tworzenie strategii	10)R	RO	3 pkt
4	rozwiązuje równanie trygonometryczne	Użycie i tworzenie strategii	6) e)R	RO	4 pkt
5	stosuje własności ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego	Modelowanie matematyczne	5)	RO	5 pkt
6	rozwiązuje równanie kwadratowe z parametrem	Użycie i tworzenie strategii	3) b)R	RO	6 pkt
7	oblicza promień okręgu i wyznacza równanie tego okręgu	Użycie i tworzenie strategii	8)R	RO	4 pkt
8	stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	2) b)R	RO	4 pkt
9	znajduje (stosuje) związki miarowe w figurach płaskich do obliczenia pola trójkąta	Użycie i tworzenie strategii	7)	RO	5 pkt
10	wyznacza objętość ostrosłupa	Użycie i tworzenie strategii	9)	RO	4 pkt
11	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia	Modelowanie matematyczne	10) R	RO	4 pkt
12	rysuje wykres funkcji o wzorze $y = \left| f(x) \right|$, mając dany wykres funkcji logarytmicznej $y = f(x)$; bada liczbę rozwiązań równania z parametrem	Użycie i tworzenie strategii	4) a) d)R	RO	3 pkt

4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki

W województwie kujawsko-pomorskim do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło po raz pierwszy 16 972 osób (18319 - 2011r., 17151 – 2012r.). Analiza danych wskazuje tendencje spadkowe.
Wynik co najmniej 30% punktów za rozwiązanie zadań na poziomie podstawowym uzyskało 85,48% zdających.

W Tabeli 3. przedstawiono procent abiturientów z uwzględnieniem typu szkoły, którzy zdali egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, tj. uzyskali co najmniej 30% punktów i zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy w latach 2005 – 2013.

Tabela 3. Porównanie zdawalności w sesjach 2005 – 2013

		woj. pomorskie					
		LO	**LP**	**T**	**LU**	**TU**	**Razem**
% osób, które zdały egzamin	**2005**	93	56	-	-	-	84
	2006	97	84	88	-	-	93
	2007	88	62	63	-	-	76
	2008	92	63	81	-	-	88
	2009	93	72	80	-	-	89
	2010	95	73	84	50	46	89
	2011	87	53	71	28	33	78
	2012	92	64	81	42	30	86
	2013	**91,69**	**64,53**	**82,28**	**34,19**	**28,13**	**85,48**

Pojęcie ***zdawalność*** do roku 2006 dotyczyło osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego, a latach 2007–2009 uzyskały 30% dla wybranego poziomu. Od roku 2010 dotyczy osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego. Przy analizie tych wyników należy uwzględnić rozdzielenie poziomów.
Zdawalność w liceach i technikach uzupełniających do 2009 roku miała małą wagę statystyczną ze względu na niewielką liczbę zdających.

4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej

Skala ta pozwala porównać wyniki egzaminu z kilku kolejnych lat. Poza tym uczeń może zinterpretować uzyskany wynik na tle całej populacji zdających i ocenić swoje realne szanse na kontynuowanie nauki.

Tabela 4. Znormalizowana skala dziewięciostopniowa staninowa

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym na skali staninowej (egzamin zdawało 358 153 osób w kraju)				
Stanin (klasa wyniku)		**Nazwa stanina**	**Wynik (w %)**	**Komentarz**
Nr	**% ogólnych wyników**			
1	4%	**najniższy**	**0% - 12%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach
2	7%	**bardzo niski**	**13% - 18%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	**niski**	**19% - 28%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	**poniżej średniej**	**29% - 44%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	**średni**	**45% - 60%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	**powyżej średniej**	**61% - 78%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	**wysoki**	**79% - 90%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	**bardzo wysoki**	**91% - 96%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	**najwyższy**	**97% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych
Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym na skali staninowej (egzamin zdawało 58 383 osób w kraju)				
Stanin (klasa wyniku)		**Nazwa stanina**	**Wynik (w %)**	**Komentarz**
Nr	**% ogólnych wyników**			
1	4%	najniższy	**0% - 4 %**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach
2	7%	bardzo niski	**5% - 14%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	**15% - 30%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	**31% - 48%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	**49% - 62%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	**63% - 74%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	**75% - 86%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	**87% - 92%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	**93% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak wskaźniki łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza z poziomu podstawowego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą absolwentów z województwa kujawsko-pomorskiego.

4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego

Tabela 5. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	LU	T	TU	Razem
Liczba zdających	9 662	406	430	6 314	1160	16 972
Liczba zdających, którzy uzyskali co najmniej 30% punktów	8 859	262	147	5 195	45	14 508
Wynik minimalny w punktach	0,00	3,00	0,00	2,00	0,00	0,00
Wynik maksymalny w punktach	50,00	45,00	42,00	50,00	38,00	50,00
Wynik średni w punktach	33,05	19,09	12,82	24,93	12,84	28,99
Wynik średni w %	66,10	38,18	25,63	49,85	25,68	57,98
Modalna w punktach	48,00	13,00	10,00	25,00	9,00	23,00
Mediana w punktach	34,00	17,50	11,00	24,00	11,00	29,00
Odchylenie standardowe w pkt.	11,95	9,13	7,37	10,58	7,23	12,40
Odchylenie standardowe w %	23,90	18,26	14,74	21,17	14,45	24,81
Zdawalność w %	**91,69**	**64,53**	**34,19**	**82,28**	**28,13**	**85,48**

Analizie statystycznej poddano wyniki 16 972 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2013 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 28,99 punktów, co stanowi ok. 57,98% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu podstawowego. Rozstęp wyników wynosi 50 i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) – 12,40 oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 17 – 41 punktów. Dla porównania w roku 2012 wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) wynosiła – 12,27, co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 17 – 42 punktów.

Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących i techników są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół. W arkuszu rozszerzonym różnice te są dużo większe.

4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści

Tabela 6. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu podstawowego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1	Liczby rzeczywiste	1, 2, 3, 23, 31	6	0,55	0,29
2	Wyrażenia algebraiczne	7, 28	3	0,34	0,26
3	Równania i nierówności	4, 10, 16, 26, 30, 34	12	0,57	0,31
4	Funkcje	5, 6, 9, 11, 29	6	0,59	0,30
5	Ciągi liczbowe	12, 13	2	0,82	0,28
6	Trygonometria	14, 27	3	0,71	0,39
7	Planimetria	15, 32	5	0,44	0,37

8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	8, 17, 18, 19	4	0,71	0,29
9	Stereometria	20, 21, 25, 33	7	0,59	0,31
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	22, 24	2	0,72	0,34

Powyższe wyniki wskazują, że uczniowie zdający egzamin na poziomie podstawowym rozwiązują zadania z poszczególnych działów na poziomie około 50 procent i więcej. Najniższy wskaźnik łatwości (0,34) z działu: „Wyrażenia algebraiczne" jest spowodowany tym, że jest to zadanie typu *Udowodnij*…. Zadanie 32 z „Planimetrii" sprawiało zdającym duże trudności, bo było ono ze standardu IV. Najłatwiejsze są dla nich zadania otwarte z liczb rzeczywistych i funkcji. Wynika to z faktu, że zadania tego typu występowały na niższych etapach edukacji i egzaminach.

4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 7. Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu podstawowego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	0,65	0,23
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	0,71	0,25
3. Modelowanie matematyczne.	0,47	0,38
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,45	0,38
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,17	0,32

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najłatwiejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie I, w którym zdający wykorzystuje i tworzy informacje. W dalszym ciągu najtrudniejszy jest standard V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z obszarów przedstawia tabela 8.

Tabela 8. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3, 4, 7, 10, 11, 15, 16, 20, 23		9	18%
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	1, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 24, 25	26, 27, 29, 30	22	44%
3. Modelowanie matematyczne	2, 22	34	7	14%
4. Użycie i tworzenie strategii		32, 33	8	16%
5. Rozumowanie i argumentacja		28, 31	4	8%

4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny podstawowy był dla zdających umiarkowanie trudny (0,58).
Bardzo trudne okazały się zadania na dowodzenie: 28 i 31.
Stopień wykonania zadań z arkusza podstawowego przedstawiono w Tabelach 9 i 10.

Tabela 9. **Łatwość zadań arkusza podstawowego**

Numery zadań	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Łatwość zadań	0,73	0,73	0,70	0,88	0,61	0,69	0,80	0,77	0,66	0,48	0,46

Numery zadań	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
Łatwość zadań	0,71	0,93	0,74	0,63	0,63	0,79	0,80	0,49	0,56	0,84	0,60

Numery zadań	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
Łatwość zadań	0,68	0,85	0,71	0,68	0,69	0,11	0,55	0,73	0,23	0,39	0,50	0,39

Rysunek 1. Łatwość zadań arkusza podstawowego

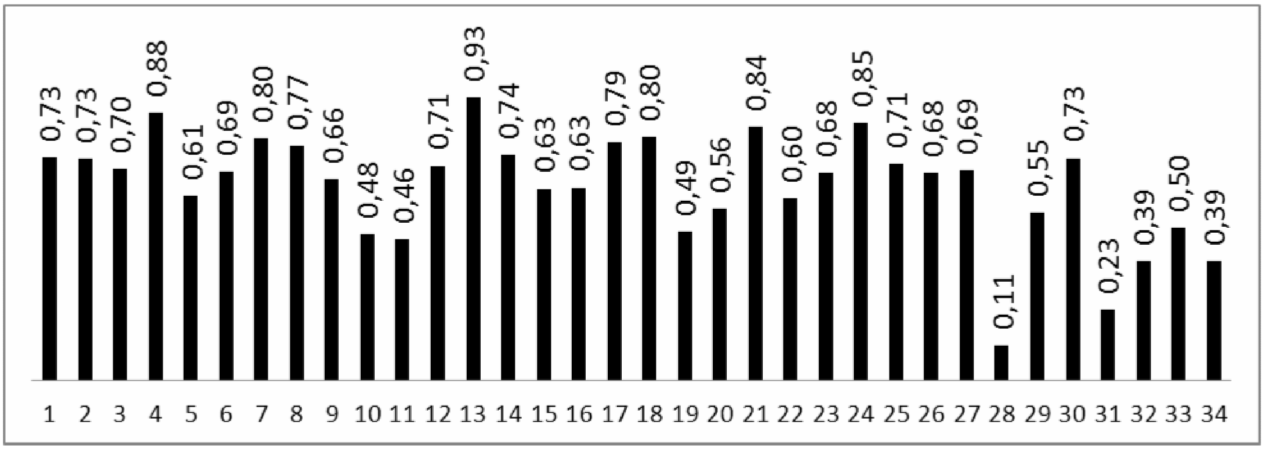
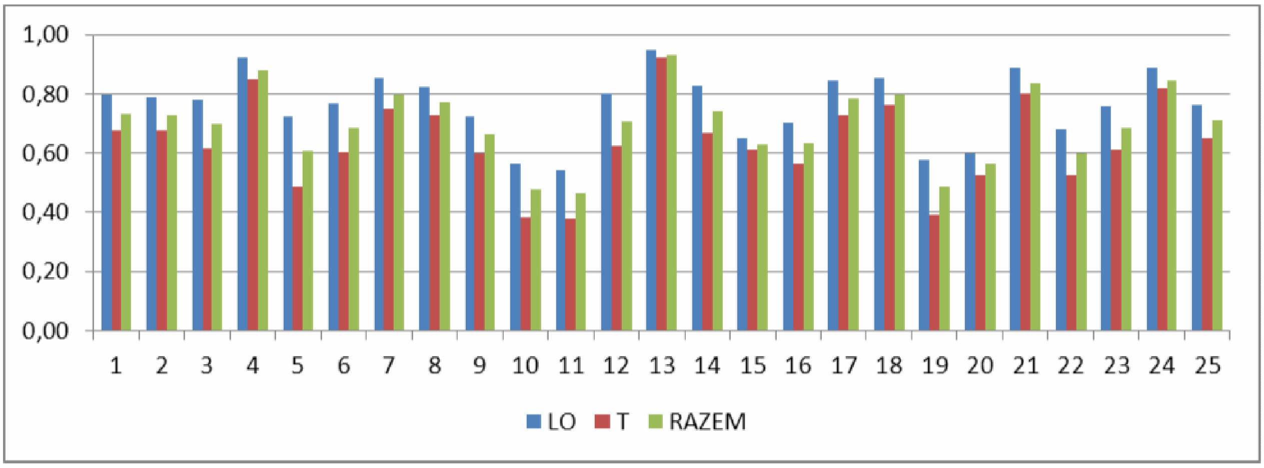


Tabela 10. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza podstawowego

Stopień trudności	**Wskaźnik łatwości**	**Numery zadań**	**Liczba zadań**
Bardzo trudne	0,00-0,19	28	1
Trudne	0,20-0,49	10, 11, 19, 31, 32, 34	6
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	5, 6, 9, 15, 16, 20, 22, 23, 26, 27, 29, 33	12
Łatwe	0,70-0,89	1, 2, 3, 4, 7, 8, 12, 14, 17, 18, 21, 24, 25, 30	14
Bardzo łatwe	0,90-1,00	13	1

W arkuszu dla poziomu podstawowego znalazły się zadania od bardzo trudnych po bardzo łatwe, co wskazuje na duże zróżnicowanie poziomu zadań. Spośród zadań najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte: 13 – ciąg arytmetyczny, które można było rozwiązać w pamięci, 4 – układ równań liniowych, które można było rozwiązać *strategią sprawdzania*.

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza podstawowego z podziałem na szkoły



Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół.

4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak np. wskaźnik łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza rozszerzonego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą całej grupy abiturientów, którzy wybrali matematykę na poziomie rozszerzonym.

4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego

W Tabeli 11. przedstawiono wartości wybranych wskaźników statystycznych (wynik maksymalny, minimalny i średni wyrażone w punktach i procentach) uzyskane przez zdających za rozwiązanie zadań z arkusza rozszerzonego. W tabeli nie podano statystyki dla LP, LU i TU ze względu na małe wartości statystyczne.

Tabela 11. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających na poziomie rozszerzonym

Parametr statystyczny	Zdający		
	LO	T	Razem
Liczba zdających	1 667	278	1 953
Wynik minimalny w punktach	0,00	0,00	0,00
Wynik maksymalny w punktach	50,00	47,00	50,00
Wynik średni w punktach	31,36	18,12	29,37
Wynik średni w %	62,72	36,24	58,75
Modalna w punktach	34,00	8,00	34,00
Mediana w punktach	33,00	16,00	31,00
Odchylenie standardowe w pkt.	11,22	12,19	12,34
Odchylenie standardowe w %	22,43	24,38	24,67

Analizie statystycznej poddano wyniki 1 953 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2013 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 29,37 punktów, co stanowi 58,75% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu rozszerzonego. Rozstęp wyników wynosi 50 punktów i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) – 12,34 – oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 17 – 42 punktów.

4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych

Tabela 12. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu rozszerzonego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1.	Liczby rzeczywiste	–	–	–	–
2.	Wyrażenia algebraiczne	8	4	0,74	0,37
3.	Równania i nierówności	1, 6	10	0,65	0,34
4.	Funkcje	12	3	0,68	0,34
5.	Ciągi liczbowe	5	5	0,83	0,28
6.	Trygonometria	4	4	0,75	0,34
7.	Planimetria	2, 9	9	0,49	0,37
8.	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	7	4	0,61	0,40
9.	Stereometria	10	4	0,30	0,35
10.	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	3, 11	7	0,39	0,29

Powyższe wyniki wskazują, że dla zdających najtrudniejszymi działami matematyki są: „Elementy statystyki opisowej, teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka” (0,39) i „Stereometria” – dowód (0,30).

4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 13 Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu rozszerzonego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	0,74	0,37
3. Modelowanie matematyczne	0,69	0,24
4. Użycie i tworzenie strategii	0,56	0,26
5. Rozumowanie i argumentacja	0,44	0,45

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najtrudniejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia Tabela 14.

Tabela 14. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
2.Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	8	4	8%
3. Modelowanie matematyczne	5, 11	9	18%
4. Użycie i tworzenie strategii	1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12	4	66%
5. Rozumowanie i argumentacja	2	4	8%

4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny rozszerzony był dla zdających umiarkowanie trudny (0,59).
Najtrudniejsze okazały się zadania:

- 3. – obliczenia z kombinatoryki,
- 10. – zadanie ze stereometrii, znalezienie związków miarowych w ostrosłupie.

Najłatwiejsze okazały się zadania:

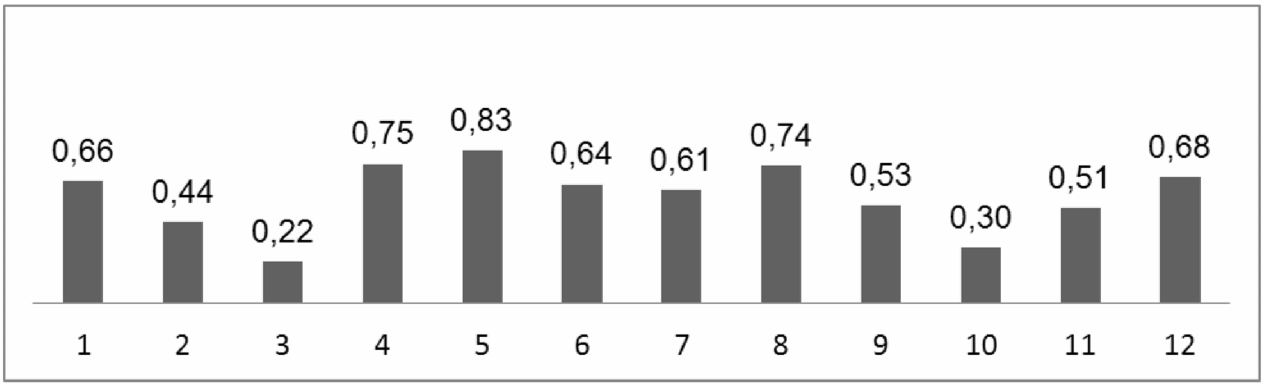
- 5. – mix ciągów
- 4. – równanie trygonometryczne.

Stopień wykonania zadań z arkusza rozszerzonego przedstawiono w Tabelach 15. i 16.

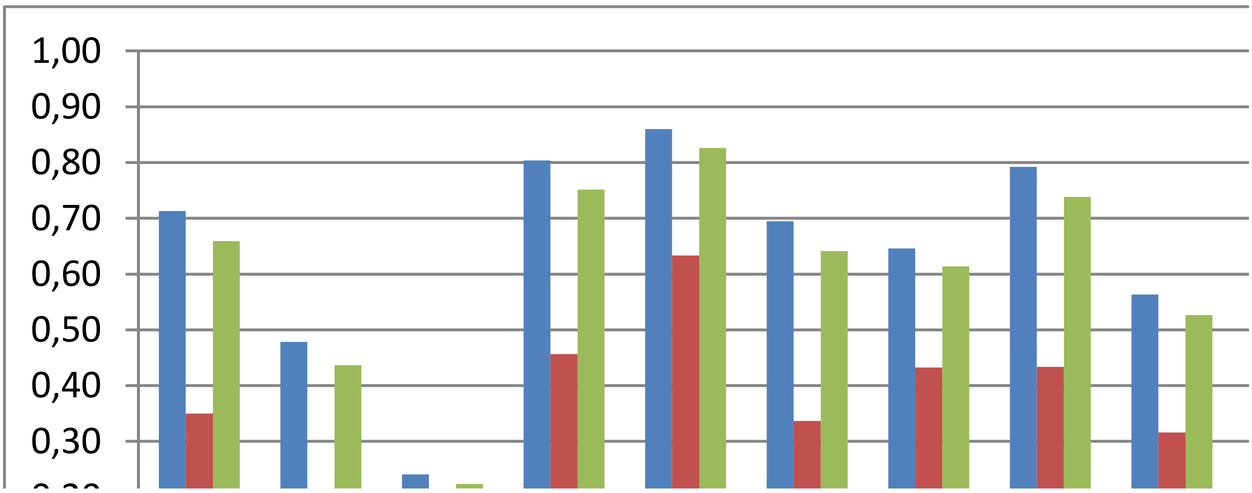
Tabela 15. Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Łatwość zadań	0,66	0,44	0,22	0,75	0,83	0,64	0,61	0,74	0,53	0,30	0,51	0,68

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego



Rysunek 3 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego z podziałem na szkół



Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie technikum i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu rozszerzonego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół.

Tabela 16. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza rozszerzonego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	–	–
Trudne	0,20-0,49	2, 3, 10	3
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 6, 7, 9, 11, 12	6
Łatwe	0,70-0,89	4, 5, 8	3
Bardzo łatwe	0,90-1,00		

Spośród zadań umieszczonych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego nie było zadań bardzo trudnych i bardzo łatwych.

4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych

Analizy zadań zamkniętych dokonano ze względu na najbardziej optymalne strategie rozwiązania danych zadań.

Wskaźniki łatwości zadań w okręgu są porównywalne z krajowymi i typowe błędy w rozwiązaniach były analogiczne jak w skali kraju.

Analiza jakościowa poszczególnych zadań wykazuje, że zadania egzaminacyjne dobrze ilustrują standardy wymagań egzaminacyjnych.

Arkusz podstawowy – zadania zamknięte

Wykorzystanie i tworzenie informacji

Zadania: 3, 4, 7, 10, 11, 15, 16, 20, 23

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Zadania: 1, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 24, 25

Modelowanie matematyczne

Zadania: 2, 22

STRATEGIA OTWIERANIA

Strategia otwierania polega na tym, że uczeń rozwiązuje zadanie jako otwarte, a otrzymany wynik odszukuje wśród zaproponowanych odpowiedzi.

STRATEGIA SPRAWDZANIA

Strategia sprawdzania warunków polega na tym, że uczeń sprawdza, dla której z zaproponowanych odpowiedzi spełnione są wszystkie warunki zadania.

STRATEGIA ELIMINACJI

Strategia eliminacji i preferencji polega na odrzuceniu tych odpowiedzi, które nie spełniają warunków zadania, począwszy od odpowiedzi najbardziej odbiegających od warunków zadania, kończąc na tych najbardziej zbliżonych.

ŁĄCZENIE STRATEGII

Łączenie strategii (strategia mieszana) polega na tym, że uczeń rozwiązuje zadanie różnymi strategiami, np. zaczyna od eliminacji dwóch odpowiedzi, a potem otwiera zadanie albo sprawdza, czy któraś z pozostałych odpowiedzi spełnia warunki zadania.

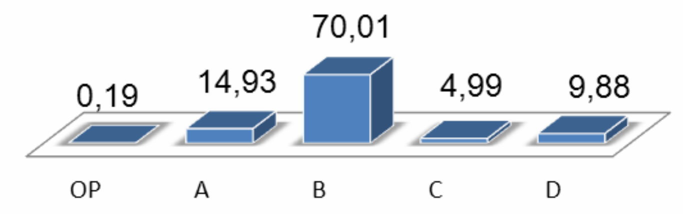
STRATEGIA OTWIERANIA

Zadanie 3.

Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Sprawdzane umiejętności Wykonanie obliczeń z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (I.1.h)
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**

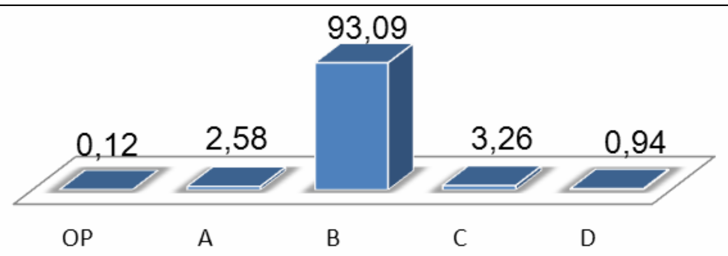


Zadanie 13.

Ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$ i $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$ B. $a_1 = 2$ C. $a_1 = 6$ D. $a_1 = 12$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (II.5.c)
Poprawna odpowiedź: **B – bardzo łatwe**

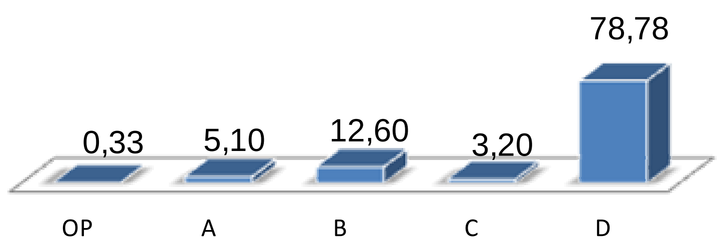


Zadanie 17.

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu *ABCD*. Obwód tego rombu jest równy

A. $\sqrt{13}$ B. 13 C. 676 D. $8\sqrt{13}$

Sprawdzane umiejętności Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie i obwodu rombu (II.8.e)
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**



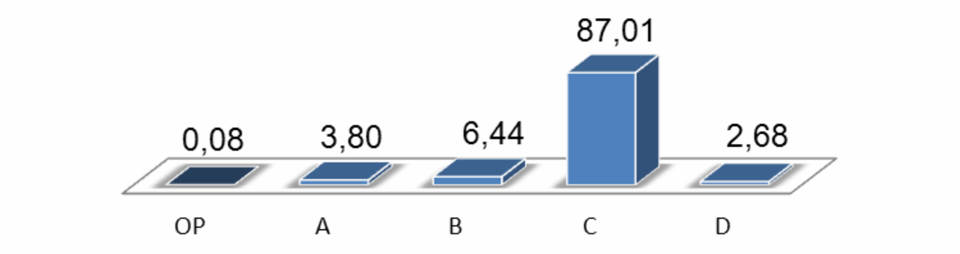
STRATEGIA SPRAWDZANIA

Zadanie 4.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x+3y=3 \\ 8x-6y=48 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x=-3$ i $y=4$ B. $x=-3$ i $y=6$ C. $x=3$ i $y=-4$ D. $x=9$ i $y=4$

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie układu równań liniowych (I.3.c)
Poprawna odpowiedź: **C – łatwe**

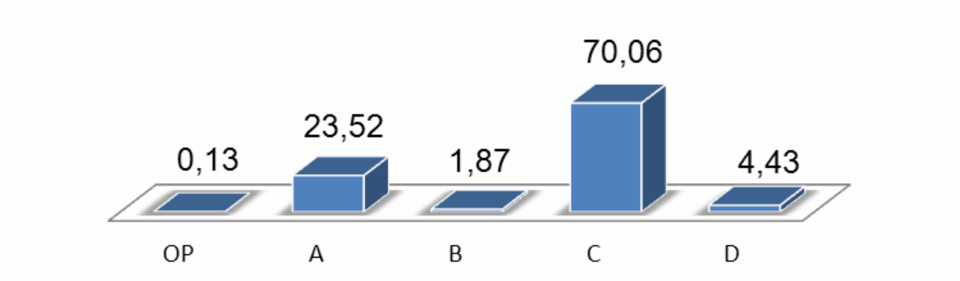


Zadanie 12.

Ciąg $(27, 18, x+5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x=4$ B. $x=5$ C. $x=7$ D. $x=9$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (II.5.c)
Poprawna odpowiedź: **C – łatwe**

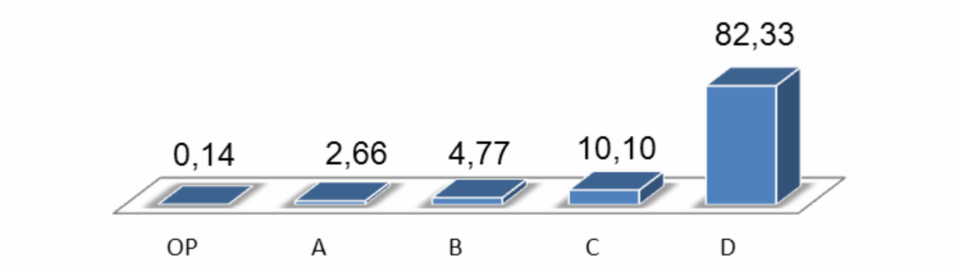


Zadanie 24.

Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb: $1, 2, 3, x, 5, 8$ jest równa 4. Wtedy

A. $x=2$ B. $x=3$ C. $x=4$ D. $x=5$

Sprawdzane umiejętności Obliczanie mediany uporządkowanego zestawu danych (II.10.a)
Poprawna odpowiedź: **C – łatwe**

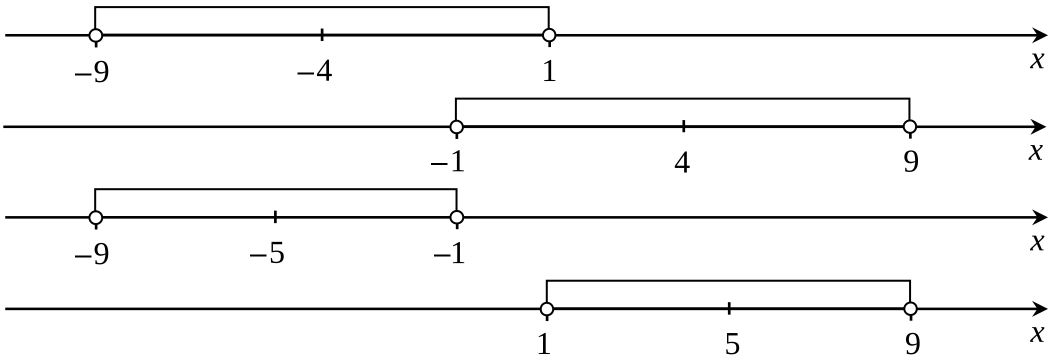


STRATEGIA ELIMINACJI

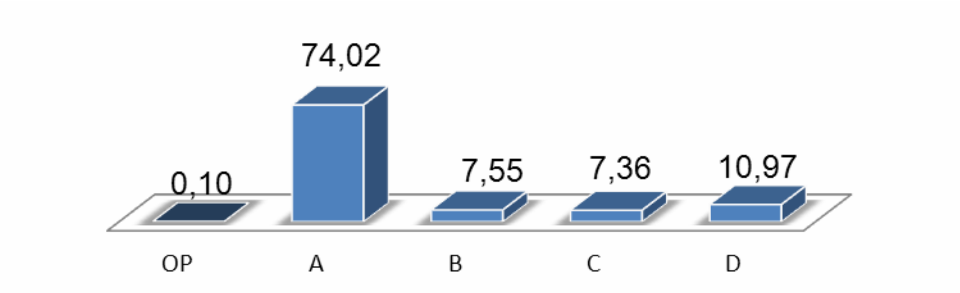
Zadanie 1.

Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x+4|<5$.

A.
B.
C.
D.



Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $|x-a|<b$ (II.1.f)
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**

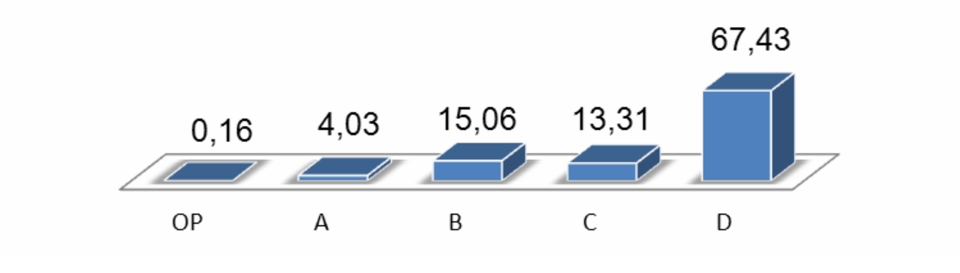


Zadanie 6.

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y=-3(x-2)^2+4$ jest punkt o współrzędnych

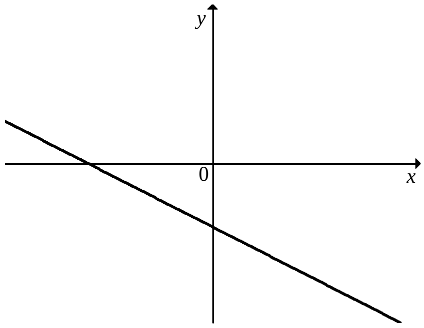
A. $(-2,-4)$ B. $(-2,4)$ C. $(2,-4)$ D. $(2,4)$

Sprawdzane umiejętności Odczytanie ze wzoru funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (II.4.h)
Poprawna odpowiedź: **D – umiarkowanie trudne**



Zadanie 9.

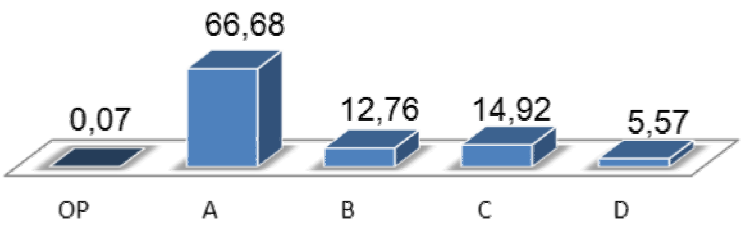
Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$.



Jakie znaki mają współczynniki a i b ?

A. $a < 0$ i $b < 0$ B. $a < 0$ i $b > 0$ C. $a > 0$ i $b < 0$ D. $a > 0$ i $b > 0$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie współczynników we wzorze funkcji liniowej do określenia położenia prostej w układzie współrzędnych (II.4.g)
Poprawna odpowiedź: **B – umiarkowanie trudne**

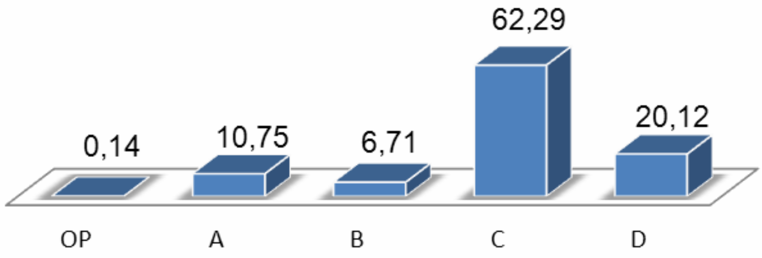


Zadanie 16.

Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x+1)(x+2)(x^2+3)=0$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie równania wielomianowego (I.3.d)
Poprawna odpowiedź: **B – umiarkowanie trudne**



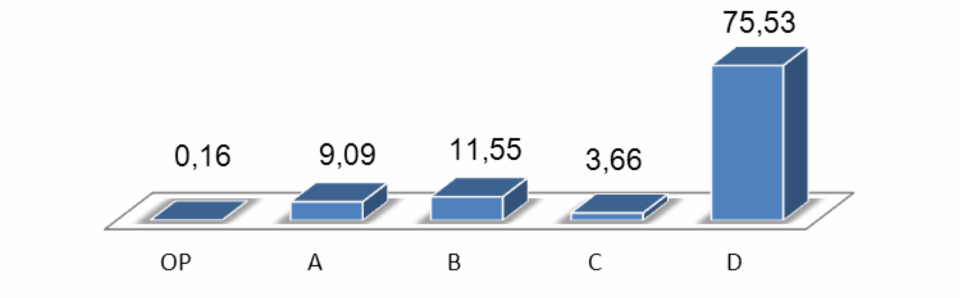
ŁĄCZENIE STRATEGII

Zadanie 8.

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

A. $m = -3$ B. $m = \frac{2}{3}$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = 3$

Sprawdzane umiejętności Badanie prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**

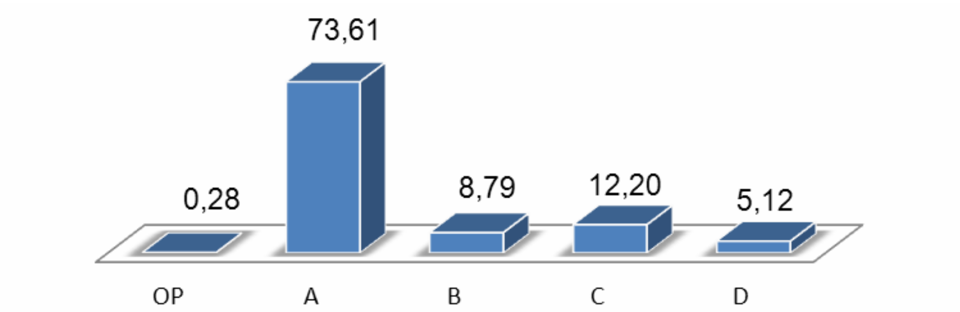


Zadanie 14.

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa

A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**



Zadania otwarte

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania (z uwzględnieniem kryteriów oceniania zdających ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki) zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Zadania: 26, 27, 29, 30

Modelowanie matematyczne

Zadania: 34

Użycie i tworzenie strategii

Zadania: 32, 33

Rozumowanie i argumentacja

Zadania: 28, 31

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-8x-16=0$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,68 – **umiarkowanie trudne**	0,77	0,47	0,18	0,61	0,23

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu, stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x\left(x^2-8\right)+2\left(x^2-8\right)=0 \qquad \text{lub} \qquad x^2\left(x+2\right)-8\left(x+2\right)=0$$

$$\left(x+2\right)\left(x^2-8\right)=0.$$

Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$ lub $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Przydział punktów za rozwiązanie zadania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $(x+2)(x^2-8)$, $(x+2)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-2$, $x=-\sqrt{8}$, $x=\sqrt{8}$.

Komentarz

Zadanie kolejny raz okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne, dla absolwentów LO – łatwe.

Mimo iż ten typ zadania pojawiał się na wszystkich egzaminach maturalnych, to tylko 57% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, 26% uzyskało 0 punktów, pozostali zdający nadal popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania:

- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x+2)-8(x-2)$,
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x+2) \quad 8(x+2)$ (pomijanie znaku działania),
- niewłaściwego rozkładu na czynniki, np. $x^2(x+2)-8(x-2)=(x^2-8)(x+2)(x-2)$,
- **niewłaściwego dzielenia $x^3+2x^2-8x=16/:x$ i rozwiązywania równania $x^2+2x-8=0$, obliczania Δ i pierwiastków równania.**

Zadania 27. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$.

Sprawdzane umiejętności

Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,69 – **umiarkowanie trudne**	0, 78	0,46	0,20	0,61	0,21

Przykładowe poprawne zapisy rozwiązania

1) Ponieważ α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha=60^\circ$. Zatem $\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

   Stąd $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$.

2) Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, przekształcamy wyrażenie $\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$ do postaci $4\sin^2\alpha-3$, a następnie obliczamy jego wartość: $4\sin^2\alpha-3=0$.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- zapisze wartość cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

albo

- zapisze wyrażenie w postaci $\sin^2\alpha - 3\left(1-\sin^2\alpha\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy, że $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

Komentarz
Zadanie okazało się dla absolwentów LU i TU trudne, a dla pozostałych zdających łatwe. W rozwiązaniu najważniejszy był wybór metody i konsekwentne przeprowadzenie rozwiązania do końca. Zdający najczęściej stosowali pierwszy sposób rozwiązania, czyli odczytywali $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$ i obliczali wartość wyrażania. Ok. 13% zdających otrzymało 1 punkt. **Wielu piszących błędnie wykonywało rachunki arytmetyczne.**

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x+y+z=0$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx \le 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

Sprawdzana umiejętność
Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,11 – **bardzo trudne**	0,18	0,01	0,00	0,04	0,00

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Podnosimy obie strony równości $x+y+z=0$ do kwadratu i otrzymujemy równość równoważną

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0.$$

Stąd

$$xy+xz+yz=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Ponieważ suma kwadratów liczb x, y, z jest nieujemna, więc $-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 0$, czyli $xy+yz+zx\le 0$, co kończy dowód.

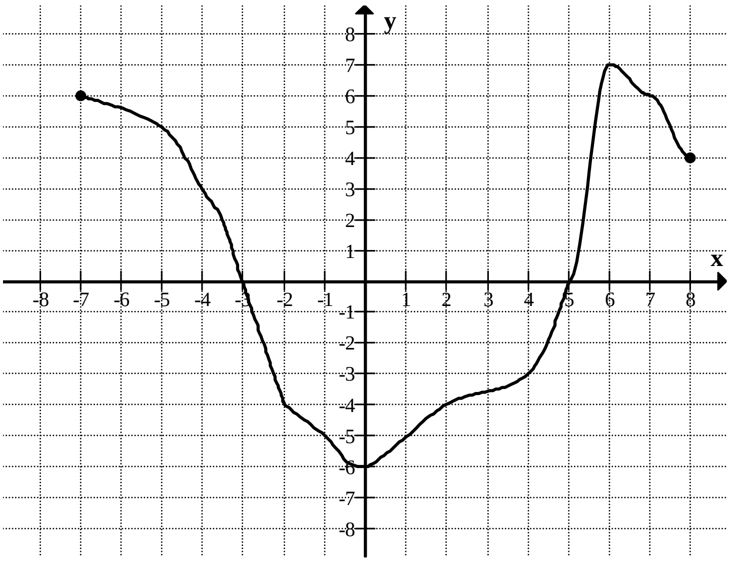
Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje 1 pkt gdy podniesie obie strony równości $x+y+z=0$ do kwadratu i zapisze np. $xy+xz+yz=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ lub $2xy+2xz+2yz=-x^2-y^2-z^2$ i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2$ lub $-x^2-y^2-z^2$.

Zdający otrzymuje 2 pkt jeśli przedstawi kompletny dowód.
Komentarz Zadanie okazało się dla absolwentów LO trudne, a dla pozostałych zdających **bardzo trudne** i było to najtrudniejsze zadanie w tym arkuszu. Zadania typu *Wykaż…* z reguły budzą obawy zdających. Tak było również w tym przypadku. Ponad 83% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania. Tylko 10% zdających poprawnie wykorzystało założenia i uzasadniło prawdziwość podanej nierówności algebraicznej. Jednak najczęściej zdający przekształcali równanie do postaci $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=0$ i na tym kończyli dowód. Za takie rozwiązanie uzyskiwali 1 punkt. **Nadal pojawiały się rozwiązania, w których zdający dowodzili prawdziwości tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowali na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb spełniających założenie.**

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) największą wartość funkcji f,

b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Sprawdzane umiejętności Odczytywanie z wykresu funkcji zbioru jej wartości oraz przedziałów, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne (II.4.b)					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
2011 rok **0,55 – umiarkowanie trudne**	0,60	0,33	0,14	0,39	0,22
2013 rok **0,55 – umiarkowanie trudne**	0,64	0,32	0,15	0,46	0,15

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Odczytujemy z wykresu największą wartość funkcji f . Jest ona równa 7.

Podajemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: $(-3,5)$.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- poda największą wartość funkcji: 7 i nie poda zbioru tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne

albo

- poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: $(-3,5)$ i nie poda największej wartości funkcji *f*.

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy poda największą wartość funkcji oraz poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: 7, $(-3,5)$.

Komentarz

Podobne zadanie było w arkuszu w 2011 roku i jego łatwości były bardzo zbliżone. Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność odczytywania podstawowych własności funkcji z jej wykresu. Tylko 37,08 % zdających poprawnie odczytało i zapisało wskazane własności funkcji, otrzymując tym samym 2 punkty. Niestety, 28,24 % zdających nie udzieliło poprawnej odpowiedzi do żadnego z podanych poleceń.

Zdający mylili wartość funkcji z punktem o największej rzędnej, stąd często pojawiała się odpowiedź $(6,7)$ albo zapisywali argument $x=6$ lub $x=8$. Podobnie w przypadku zapisu *zapisz zbiór rozwiązań nierówności* $f(x)<0$, powyżej 40% zdających nie umiało poprawnie zinterpretować tego zapisu. Pojawiały się błędne zapisy przedziału, np. $\{-3,5\}$ lub $(-6,\ 7)$, lub $(-3,\ 0)$. W zadaniu tym wystąpiły:

<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

W rozwiązaniu podpunktu b) akceptujemy zapisy: $x\in(5,-3)$, $x\in(3,5)$, $x\in(3,-5)$.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Sprawdzana umiejętność
Rozwiązanie nierówności kwadratowej (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,73 – łatwe	0,80	0,53	0,29	0,69	0,31

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 7x + 5$

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$ i stąd $x_1 = \frac{7-3}{4} = 1$ oraz $x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$

lub ($x \leq 1$ lub $x \geq \frac{5}{2}$).

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje 1 pkt, gdy obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

Zdający otrzymuje 2 pkt, gdy zapisze zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Komentarz

Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających i było najłatwiejszym zadaniem otwartym w tym zestawie egzaminacyjnym.

Tylko 56,66% (55% w roku 2012) zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania:

- popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego
- prawidłowo wyznaczali pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale błędnie podawali zbiór rozwiązań nierówności, np. wskazując obliczone pierwiastki jako zbiór rozwiązań tej nierówności,
- błędnie zapisywali zbiór rozwiązań nierówności, np. w postaci przedziału $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ lub $\left\langle 1, \frac{5}{2}\right\rangle$.

Odnotowano również rozwiązania, w których popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.

Grupa około 14,7% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie tej nierówności kwadratowej, mimo iż ten typ zadania pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym..

W zadaniu tym wystąpiły:

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i zapisze, np. $x \in \left(-\infty, -1\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{5}, +\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2\cdot 6^{99} + 10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Sprawdzane umiejętności Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.g)				
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,23 – **trudne**	0,34	0,06	0,01	0,10

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $6^{98}\cdot\left(6^2 - 2\cdot 6 + 10\right)$. Doprowadzamy do postaci $6^{98}\cdot 2\cdot 17$.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje1 pkt, gdy zapisze liczbę $6^{100} - 2\cdot 6^{99} + 10\cdot 6^{98}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 6^k, gdzie $80 \le k \le 98$, np. $6^{98}\left(6^2 - 2\cdot 6 + 10\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt, gdy zapisze liczbę w postaci, w której widać podzielność przez 17 albo przeprowadzi rozumowanie uzasadniające podzielność przez 17.

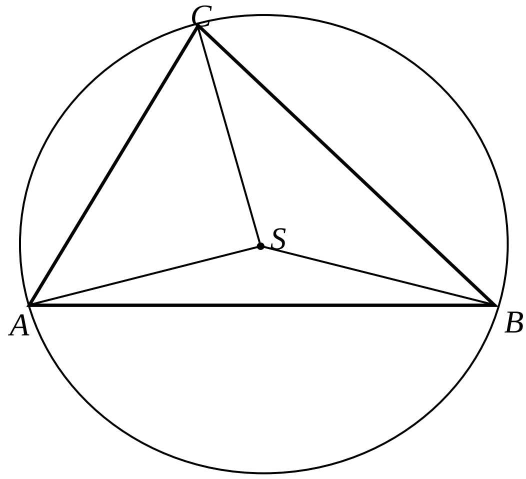
Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne, dla absolwentów T, LP i LU bardzo trudne. Prawie 73,88% absolwentów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu, co potwierdza, że zadania ze standardu V – Rozumowanie i argumentacja – sprawiają w dalszym ciągu duże kłopoty zdającym i pokazują, że działania na potęgach nie są opanowane w stopniu dostatecznym. A przecież wzory były dostępne, tylko zdający nie potrafią z nich korzystać.

Ok 2% piszących zapisało liczbę $6^{100} - 2\cdot 6^{99} + 10\cdot 6^{98}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 6^k, gdzie $80 \le k \le 98$, ale nie potrafili zapisać pełnego uzasadnienia. Pełny sukces odniosło 24% zdających.

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Punkt *S* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym *ABC*. Kąt *ACS* jest trzy razy większy od kąta *BAS*, a kąt *CBS* jest dwa razy większy od kąta *BAS*. Oblicz kąty trójkąta *ABC*.



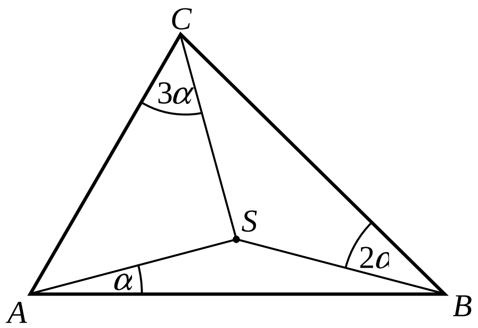
Sprawdzane umiejętności
Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,39 – **trudne**	0,50	0,14	0,06	0,27

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta. Niech α oznacza miarę kąta *BAS*. Wówczas

$$|\sphericalangle CBS| = 2\alpha \text{ i } |\sphericalangle ACS| = 3\alpha .$$



Każdy z trójkątów *ABS*, *BCS* i *CAS* jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha , \ |\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 2\alpha , \ |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS| = 3\alpha .$$

Miary kątów trójkąta *ABC* są więc równe $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha$, $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha$, $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha$.

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°, zatem $4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, $12\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 15^\circ$.

Więc $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha = 4\cdot 15^\circ = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha = 3\cdot 15^\circ = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha = 5\cdot 15^\circ = 75^\circ$.

Przydział punktów za zadanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania – 1 pkt

- Zapisanie miar kątów *BAS*, *ACS* i *CBS* w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów *ABS*, *BCS* i *CAS* są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 pkt

- Zapisanie miar kątów *BAS*, *ACS* i *CBS* w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$ i wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów *ABS*, *BCS* i *CAS* są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć miary kątów trójkąta *ABC*, np.: $4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$.

Rozwiązanie pełne – 4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta *ABC*: $|\angle BAC| = 60^\circ$, $|\angle CBA| = 45^\circ$, $|\angle ACB| = 75^\circ$.
Komentarz Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne. Prawie 42% absolwentów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu. Rozwiązywanie zadań z planimetrii, stanowi dużą trudność, bez względu na stopień ich złożoności. W omawianym zadaniu zdający mieli przeprowadzić proste rozumowanie oparte na własnościach symetralnych boków trójkąta oraz wykorzystać, że suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°. Ponad 41% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, a tylko 30% maturzystów poprawnie obliczyło kąty trójkąta *ABC*. Jednak najczęściej zdający zapisywali, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest 180° i nie umieli tego wykorzystać.

Zadanie 33. *(4 pkt)*

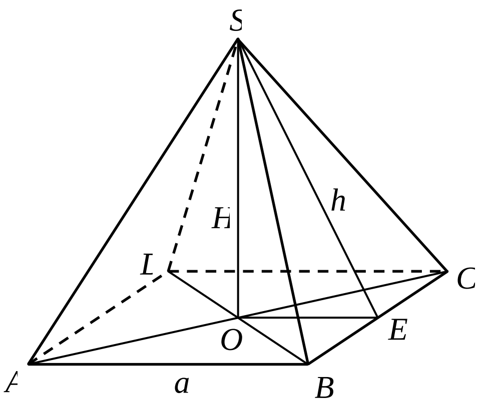
Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzana umiejętność
Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach. (IV.9.b)

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,50 – **umiarkowanie trudne**	0,60	0,23	0,12	0,40	0,10

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe 100, więc $a^2 = 100$. Stąd $a = 10$.

Pole powierzchni bocznej jest równe 260, więc $4 \cdot \frac{1}{2} ah = 260$. Stąd i z poprzedniego wyniku

$$2 \cdot 10h = 260, \text{ więc } h = 13.$$

Ponieważ trójkąt *EOS* jest prostokątny, więc $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = h^2$,

$$5^2 + H^2 = 13^2,$$
$$H^2 = 144,$$
$$H = 12.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa $V = \frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$.

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 400 cm^3.

Przydział punktów za takie rozwiązanie **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania – 1 pkt**, gdy zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a=10$. **Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 pkt,** gdy zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H=12$. **Rozwiązanie pełne – 4 pkt,** gdy zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V=400\ \text{cm}^3$.
Komentarz Tylko 38% zdających otrzymało za rozwiązanie tego zadania komplet punktów, a 28% otrzymało tylko 1 punkt za obliczenie długości krawędzi podstawy. Zdający bardzo często obliczali wysokość ściany bocznej i przyjmowali, że obliczona wysokość jest wysokością ostrosłupa. Zdarzały się błędnie narysowane ostrosłupy i błędnie zinterpretowane podane wielkości.

Zadanie 34. (*5 pkt*)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Sprawdzana umiejętność
Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
2012 **0,38 – trudne**	0,50	0,08	0,02	0,21	0,03
2013 **0,39 – trudne**	0,51	0,13	0,03	0,26	0,02

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Niech v oznacza średnią prędkość (w km/h) pierwszego pociągu na tej trasie, t - czas przejazdu (w godzinach) pierwszego pociągu na tej trasie. Wtedy $v-9$ oznacza średnią prędkość drugiego pociągu na tej trasie, $t+\frac{2}{3}$ - czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie. Zapisujemy układ równań $\begin{cases} v\cdot t=336 \\ (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $t=\frac{336}{v}$ i podstawiamy do równania drugiego.

Otrzymujemy równanie z niewiadomą v, które przekształcamy równoważnie $(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336$,

$\frac{2}{3}v-\frac{9\cdot 336}{v}-6=0$, $\frac{2}{3}v^2-6v-9\cdot 336=0$ (lub $2v^2-18v-9072=0$ lub $v^2-9v-4536=0$).

Równanie to ma dwa rozwiązania $v_1=72$, $v_2=-63<0$.

Drugie z tych rozwiązań odrzucamy (prędkość nie może być ujemna).

Gdy $v=72$, to wtedy $v-9=63$.

Odpowiedź: Średnia prędkość pierwszego pociągu jest równa $72\ \text{km}/\text{h}$, średnia prędkość drugiego pociągu równa się $63\ \text{km}/\text{h}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania – 1 pkt
Zdający zapisze równanie, w którym co najmniej jedna z wielkości (prędkość, czas) jest uzależniona od przyjętej niewiadomej, np.:

$$(v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 pkt
Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$v\cdot t=336 \text{ i } (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } v\cdot t=336 \text{ i } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 pkt
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą v lub t.

$$(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}-9\right)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336$$

$$\text{albo } (v+9)\left(\frac{336}{v}-\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}+9\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie) – 4 pkt
Zdający rozwiąże równanie z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu zapisze prędkości obu pociągów albo zdający rozwiąże równanie kwadratowe i zapisze prędkość tylko jednego pociągu.

Rozwiązanie pełne – 5 pkt
Zdający obliczy średnie prędkości obu pociągów: średnia prędkość pierwszego pociągu równa się 72 $\mathrm{km/h}$, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 $\mathrm{km/h}$.

W zadaniu tym wystąpiły:

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Komentarz
Zadania tego typu występują od kilku lat w arkuszach egzaminu maturalnego, jednak 58% zdających otrzymało 0 punktów za rozwiązanie tego zadania. Wśród tych, którzy podjęli się rozwiązania 6% zdających zapisywało tylko równanie lub układ równań i na tym kończyli i za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali **1** (za zapisanie tylko jednego równania) lub **2 punkty**.
Błędy w rozwiązaniu zadania pojawiały się na różnych etapach. Zdający, np.:

- **nie zamienili 40 minut na $\frac{2}{3}$ godziny**
- błędnie zapisywali równanie opisujące zależności dla pierwszego pociągu i okazywało się, że jedzie on dłużej i wolniej niż drugi
- popełniali błędy przy przekształceniu układu do równania kwadratowego
- błędnie interpretowali treść zadania i porównywali wielkości różnych typów, np. zapisywali układ $\begin{cases} v\cdot t=336 \\ (v-9)(t+40)=336 \end{cases}$ lub $\begin{cases} v\cdot t=336 \\ (v-9)=(t+40) \end{cases}$

Poziom rozszerzony

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do standardów, rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteriach oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Zadanie 8.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-5x^2-23x+m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika *m* oraz pierwiastki tego wielomianu.

<table>
<tr><td colspan="2">Sprawdzane umiejętności
Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu (II.2.b.c.R)</td></tr>
<tr><td>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</td><td>0,74 - łatwe</td></tr>
<tr><td colspan="2">Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x+1$ jest równa $W(-1)$.
Zatem
$$4(-1)^3-5(-1)^2-23(-1)+m=20.$$
Stąd $m=6$. Wielomian W ma zatem postać $W(x)=4x^3-5x^2-23x+6$.
Zauważmy, że $W(3)=4\cdot 3^3-5\cdot 3^2-23\cdot 3+6=3\cdot(36-15-23+2)=0$.
Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x-3$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy
$$4x^3-5x^2-23x+6=(x-3)(4x^2+7x-2).$$
Obliczamy pierwiastki trójmianu $4x^2+7x-2$: $\Delta=7^2-4\cdot 4\cdot(-2)=81$, $\sqrt{\Delta}=9$,
$$x_1=\frac{-7-9}{8}=-2,\ x_2=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}.$$
W rezultacie wielomian W ma trzy pierwiastki: $x=-2$, $x=\frac{1}{4}$, $x=3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania – 1 p.
Zdający zapisze równanie z niewiadomą m, np. $4\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-23\cdot(-1)+m=20$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 p.
Zdający obliczy wartość współczynnika m: $m=6$.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 p.
Zdający poda jeden z pierwiastków wielomianu, np.: 3, podzieli wielomian przez dwumian $(x-3)$ i otrzyma iloraz $4x^2+7x-2$.
Rozwiązanie pełne – 4 p.
Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu W: -2, $\frac{1}{4}$, 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe. Kluczowy dla rozwiązania tego zadania okazał się zapis $W(-1)=20$ i wyznaczenie współczynnika $m=6$. Ten etap bezbłędnie pokonało 12% zdających. Większość zdających bez problemu poradziła sobie z tą umiejętnością, choć pojawiały się także inne zapisy, np. $W(x+1)=20$ albo $W(-1)=0$. Jednak najwięcej błędów zdający popełniali po wyznaczeniu współczynnika m, na etapie rozwiązywania równania $4x^3-5x^2-23x+6=0$, czyli w umiejętności, która na poziomie rozszerzonym nie powinna sprawiać żadnych trudności.</td></tr>
</table>

Modelowanie matematyczne

Zadania: 5, 11

Zadanie 5. (*5 pkt*)

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (III.5)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,83 - łatwe**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Zapisujemy układ równań: $\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$

Podstawiamy do pierwszego równania, w miejsce $a+c$ wyrażenie $2b$ i otrzymujemy równanie $3b=33$, skąd $b=11$. Układ równań przyjmuje zatem postać: $\begin{cases} b=11 \\ a+c=22 \\ 16^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$.

Równania drugie i trzecie tworzą układ z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy, podstawiając wyrażenie $22-a$ w miejsce niewiadomej c w równaniu trzecim. Otrzymujemy zatem równanie kwadratowe z niewiadomą a: $a^2-42a+297=0$. Zatem $a=33$ lub $a=9$.
Jeżeli $a=33$, to $c=-11$ i oczywiście $b=11$.
Otrzymujemy zatem ciąg arytmetyczny $(33, 11, -11)$, a po odpowiednich przekształceniach ciąg geometryczny $(32, 16, 8)$. Jeżeli zaś $a=9$, to $c=13$ i $b=11$. Otrzymujemy teraz ciąg arytmetyczny $(9, 11, 13)$, a po wykonaniu odpowiednich przekształceń ciąg geometryczny $(8, 16, 32)$. Szukanymi liczbami są zatem: $a=33$, $b=11$, $c=-11$ lub $a=9$, $b=11$, $c=13$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania – 1 pkt, gdy zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisze odpowiednie równanie, np. $2b=a+c$ **albo** $(b+5)^2=(a-1)(c+19)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp – 2 pkt, gdy zdający wykorzysta własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisze układ równań umożliwiający obliczenie liczb *a*, *b*, *c*, np. $\begin{cases} a+b+c=33 \\ a+c=2b \\ (b+5)^2=(a-1)(c+19) \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania – 3 pkt, gdy zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą *a* lub *c*, np. $a^2-42a+297=0$ lub $c^2-2c-143=0$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) – 4 pkt, gdy zdający

- poprawne rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb

albo

- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne – 5 pkt, gdy zdający wyznaczy szukane liczby: $a=33$, $b=11$, $c=-11$ lub $a=9$, $b=11$, $c=13$.

Komentarz

Zadanie okazało się najłatwiejsze w tym arkuszu. Zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego). Układ poprawnie zapisało ok. 90% zdających. Trudności pojawiły się na etapie rozwiązywania układu równań.

Najczęściej powtarzające się błędy w rozwiązaniach zadania, to:

- błędy rachunkowe w przekształceniach
- sprawdzanie warunków zadania dla kilku wybranych wartości *a*, *b* oraz *c* i na podstawie tych obliczeń formułowanie odpowiedzi, często błędnej
- mylenie ciągów (mniej tego typu błędów niż w poprzednich latach)
- błędy rachunkowe przy próbach wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego
- nieuzasadnione odrzucanie jednego z rozwiązań.

5 punktów za **pełne rozwiązanie** zadania otrzymało 60% zdających.

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Sprawdzane umiejętności

Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10)

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,51 – umiarkowanie trudne**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Zdarzeniem elementarnym w tym doświadczeniu jest każdy ciąg czteroelementowy, którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jest to model klasyczny.

Wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest 6^4.

Zauważmy, że $60=1\cdot 2\cdot 5\cdot 6=1\cdot 3\cdot 4\cdot 5=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$. Oznacza to, że należy rozpatrzyć trzy przypadki:

1) ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,2,5,6\}$. Jest ich $4!=24$.

2) ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,3,4,5\}$. Jest ich $4!=24$.

3) ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru $\{2,3,5\}$, i których dwa wyrazy są dwójkami. Jest ich $4\cdot 3=12$. Otrzymujemy zatem 60 ciągów.

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest więc równe $\frac{60}{6^4}=\frac{5}{108}$.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Zasadnicze trudności tego zadania polegają na zauważeniu trzech różnych sposobów otrzymania iloczynu równego 60 oraz zliczeniu, w każdym przypadku, liczby różnych czterowyrazowych ciągów. Za każdy rozpatrzony przypadek wraz z obliczoną poprawnie liczbę ciągów zdający otrzymuje **1 punkt**.

Czwarty punkt przyznamy zdającemu, który zapisze, że prawdopodobieństwo opisanego w treści zadania zdarzenia jest równe $\frac{|A|}{6^4}$, gdzie $|A|$ oznacza obliczoną przez zdającego liczbę ciągów.

Komentarz

Było to typowe zadanie, w którym zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa” to najczęściej stosowany sposób rozwiązania drugiej części zadania. Rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych. Zdający w większości przypadków nie mieli problemu z obliczeniem mocy Ω. Największy problem zdającym sprawiał przypadek, w którym trzeba było zliczyć liczbę możliwości dla iloczynu $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Zadanie pokazało, że wielu zdających ma poważne problemy z rozwiązaniem typowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących modelu klasycznego. Niestety w dalszym ciągu zdarzały się przypadki rozwiązań, w których $|A| > |\Omega|$. Częstym błędem zdających było stosowanie różnych modeli, innego do obliczania mocy Ω i innego do obliczenia mocy zbioru *A*.

0 punktów za to zadania otrzymało 27% zdających.

4 punkty za **pełne rozwiązanie** zadania otrzymało tylko 13,35% zdających.

Użycie i tworzenie strategii

Zadania typu jak: 1, 4, 6, 12 pojawiały się w poprzednich arkuszach egzaminacyjnych na poziomie rozszerzonym. Analiza rozwiązań tych zadań pokazuje, że zdający wciąż popełniają ten sam rodzaj błędów.

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Rozwiąż nierówność $|2x-5|-|x+4|\le 2-2x$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (IV.3.e.R)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,66 – umiarkowanie trudne**
Komentarz Pojawiające się w rozwiązaniach błędy pokazują, że część zdających nie opanowała w dostatecznym stopniu umiejętności stosowania definicji wartości bezwzględnej, mimo że zadanie z wartością bezwzględną pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym. Stąd na przykład błędy: • zapisanie nierówności w postaci $2x-2\le(2x-5)-(x+4)\le 2-2x$ • zapisywanie nierówności bez wskazania przedziałów W prezentowanych rozwiązaniach **najczęściej brakowało jednak wyznaczenia części wspólnej przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności**. Pojawiały się też liczne błędy rachunkowe. Na podkreślenie zasługuje fakt, że poprawne rozwiązanie zadania przedstawiła duża grupa zdających (44%).	

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Rozwiąż równanie $\cos 2x+\cos x+1=0$ dla $x\in\langle 0,2\pi\rangle$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,75 – łatwe**
Komentarz Zdający, którzy przystąpili do rozwiązania równania zazwyczaj nie mieli problemów z doborem strategii zapewniającej sukces w rozwiązaniu zadania. Wzór $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ to zależność dobrze znana i umiejętnie stosowana przez większość z nich (88%). Problemu nie sprawiało również rozwiązanie równania kwadratowego (70%), choć tutaj najczęściej zdający popełniali rachunkowe. Warto również podkreślić, iż zdający nie mieli problemu z rozwiązaniem elementarnego równania trygonometrycznego $\cos x=0$, chociaż nie zawsze pamiętali o wskazaniu rozwiązań z przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$. Problem stanowiło równanie $\cos x=-\frac{1}{2}$ i tu najczęściej podawano błędne rozwiązania. Chociaż zadanie było łatwe, to tylko 50% zdających uzyskało maksymalną liczbę punktów.	

Zadanie 6. (*6 pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2+2(1-m)x+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,64 – umiarkowanie trudne**

Komentarz

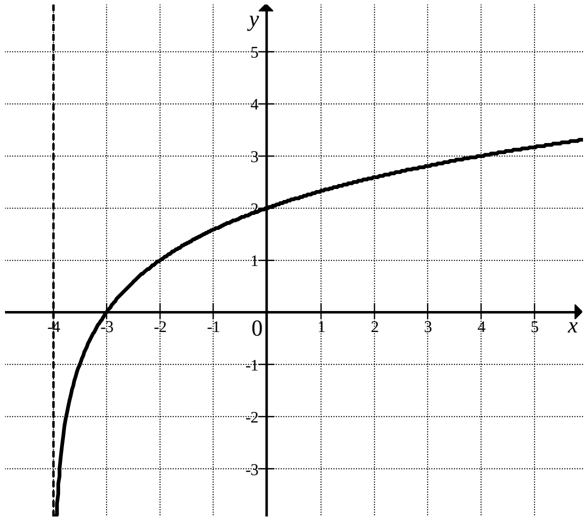
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować i zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. W schemacie oceniania tego zadania opisano dwie metody rozwiązania różniące się sposobem rozwiązywania nierówności $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$. Zazwyczaj zdający przekształcali tę nierówność, wykorzystując wzory Viète'a, ale pojawiały się także rozwiązania, w których zdający wyznaczali pierwiastki x_1, x_2, a następnie kwadrat ich iloczyn i sumę i zapisywali odpowiednie nierówności. Tylko 30 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 17,26% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.

Mimo iż ten rodzaj zadań pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, niektórzy zdający nie pamiętali o sprawdzeniu warunku, kiedy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania. Niektórzy zdający chociaż podali warunek $\Delta > 0$ nie rozwiązywali tej nierówności, czyli tracili 2 punkty.
Jednak najwięcej błędów maturzyści popełnili podczas doprowadzenia nierówności $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$ do postaci nierówności z jedną niewiadomą *m*. Niektórzy zdający:

- nie potrafili zapisać wyrażenia $x_1^2+x_2^2$ za pomocą wzorów Viète'a przyjmując np. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2$
- nie potrafili zastosować wzorów skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $x_1^2+x_2^2$, np. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2$
- popełniali błędy podczas stosowania wzorów Viète'a, np. $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2-m}{2(1-m)}$ itp.
- niepoprawnie zapisywali podwójną nierówność $x_1 \cdot x_2 \le 6m \le x_1^2+x_2^2$, np. $x_1 \cdot x_2 \le 6m$ lub $6m \le x_1^2+x_2^2$
- popełniali błędy rachunkowe.

Zaskakiwały błędy związane z wyznaczeniem części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego, np.: $m \in (-\infty,1)$ i $m \in \left\langle 0, 3-\sqrt{7} \right\rangle \cup \left\langle 3+\sqrt{7}, 7 \right\rangle$, czyli $m \in \left(-\infty, 3-\sqrt{7}\right\rangle \cup \left\langle 3+\sqrt{7}, 7 \right\rangle$.

Zadanie 12. (0–3)
Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.



a) Podaj wartość *p*.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.

c) Podaj wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

Sprawdzana umiejętność Sporządzanie wykresu funkcji $y = \|f(x)\|$, na podstawie danego wykresu funkcji logarytmicznej $y = f(x)$; badanie liczby rozwiązań równania z parametrem (IV.4.a.d i 4.a.e.R)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,68 – umiarkowanie trudne**
Komentarz Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne (łatwe od 70%). Miało największą frakcję opuszczeń – 4,3%. Tylko 41% zdających zdobyło 3 punkty. Najczęściej powtarzające się błędy w rozwiązaniach zadania, to: • błędne odczytanie parametru *p*: $p = 4$, zamiast $p = -4$ • błędny wykres funkcji $y = \|f(x)\|$, rysowano symetrię względem osi *Ox* lub osi *Oy* • przy podawaniu odpowiedzi o wszystkich wartościach parametru *m*, dla których równanie $\|f(x)\| = m$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków, nieuzasadnione domykanie przedziału: $m \in \langle 2, \infty)$.	

Przy analizie zadań: 3, 7, 9, 10 przedstawiamy kilka przykładowych sposobów rozwiązania, pozwalających na wybór strategii rozwiązania.

Zadanie 3. *(3 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,22 – trudne**

Trzy sposoby przykładowych zapisów rozwiązania zadania:

<u>I sposób rozwiązania</u>

Wybieramy z pięciu miejsc trzy miejsca, na których wstawiamy cyfrę 0, następnie wybieramy jedno z trzech miejsc dla cyfry 5, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5: $\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 30\cdot 64 = 1920$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Rozróżniamy dwa przypadki:

1. cyfra 5 znajduje się na pierwszym miejscu (jest cyfrą setek tysięcy)

albo

2. cyfra 5 nie znajduje się na pierwszym miejscu.

W pierwszym przypadku wybieramy trzy miejsca (spośród pięciu), na których umieszczamy cyfrę 0, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Takich liczb sześciocyfrowych jest $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2 = 640$.

W drugim przypadku na pierwszym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (mamy 8 takich możliwości), następnie wybieramy miejsce, w którym wstawimy cyfrę 5 (mamy 5 możliwości), a następnie z pozostałych czterech miejsc wybieramy trzy, w których wstawiamy cyfrę 0 (możemy to zrobić na 4 sposoby), na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (możemy to zrobić na 8 sposobów).
Zatem w tym przypadku mamy $8\cdot 5\cdot 4\cdot 8 = 1280$ takich liczb.

Mamy więc $1\cdot\binom{5}{3}\cdot 8^2 + 8\cdot 5\cdot 4\cdot 8 = 640 + 1280 = 1920$ liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Wybieramy cztery miejsca, na których wstawiamy cyfrę 5 i trzy cyfry 0, na pozostałych miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Jest $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2 = 3840$ takich ciągów sześciowyrazowych.

Wśród nich znajdują się te, w których cyfra 0 znajduje się na pierwszym miejscu. Jest ich

$\binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 1920$.

Stąd wynika, że liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania jest $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 8^2 - \binom{5}{3}\cdot 3\cdot 8^2 = 3840 - 1920 = 1920$.

<u>Przydział punktów za rozwiązanie I sposobem</u>

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Wybranie trzech miejsc z pięciu dla cyfry 0, wybranie jednego z trzech miejsc dla cyfry 5 i rozmieszczenie na pozostałych dwóch miejscach cyfr różnych od 0 i od 5.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Obliczenie, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne i było najtrudniejszym zadaniem w tym zestawie egzaminacyjnym. Miało jedną z największych frakcji opuszczeń (ok.3%) i około **77% zdających** otrzymało **0 punktów**.

O błędnej interpretacji zadania przez zdających świadczą zapisy, np. $C_6^3\cdot C_3^1\cdot 8^2$ lub $C_5^3\cdot C_3^1\cdot 8!\cdot 8!$, lub $8\cdot 5\cdot 4\cdot 8!$. Wśród rozwiązań maturzystów można było zauważyć zapisy świadczące o braku umiejętności stosowania reguły mnożenia, np. $\binom{5}{3}+\binom{3}{1}+8^2$ oraz takie, w których po poprawnych obliczeniach robiono dodatkowe, które dublowały poprzednie.

Zadanie rozwiązało poprawnie do końca tylko 14,5% zdających.

Dziwi niska jego łatwość, skoro podobne zadanie: *„Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki”*. wystąpiło na egzaminie maturalnym w 2011 roku.

Zadanie 7. (*4 pkt*)

Prosta o równaniu $3x-4y-36=0$ przecina okrąg o środku $S=(3,12)$ w punktach *A* i *B*. Długość odcinka *AB* jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie równania okręgu (IV.8.e.g.c.R)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,61 – umiarkowanie trudne**

Dwa sposoby przykładowych zapisów rozwiązania zadania:

I sposób rozwiązania

Odległość środka *S* okręgu od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ jest równa

$$\frac{|3\cdot 3-4\cdot 12-36|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-75|}{5}=15.$$

Jest to też długość odcinka *SC*, gdzie *C* jest środkiem cięciwy *AB*. Ponieważ $|AB|=40$, więc

$$|AC|=\frac{1}{2}\cdot 40=20.$$

Trójkąt *ACS* jest prostokątny, a jego przeciwprostokątną jest promień *r* okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $|AS|^2=|AC|^2+|SC|^2$, czyli $r^2=20^2+15^2=400+225=625$.

Równanie okręgu ma więc postać $(x-3)^2+(y-12)^2=625$.

Uwaga

Zdający może obliczyć odległość punktu *S* od prostej w inny sposób, np. wybrać na prostej dwa punkty (np. $C=(12,0)$ i $D=(0,-9)$), obliczyć pole trójkąta *CDS* ($P_{CDS}=\frac{225}{2}$), a stąd obliczyć szukaną odległość, czyli wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka *S*: $h=15$.

II sposób rozwiązania

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ przechodząca przez środek szukanego okręgu jest symetralną cięciwy *AB*. Jej równanie ma postać

$$4(x-3)+3(y-12)=0,$$
$$4x+3y-48=0.$$

Środek *D* cięciwy *AB* jest punktem przecięcia tej prostej z prostą *AB*. Jego współrzędne obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}3x-4y-36=0\\4x+3y-48=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=12\\y=0\end{cases},\text{ więc } D=(12,0).$$

Punkty *A* i *B* leżą na okręgu o środku *D* i promieniu 20 i na prostej *AB*. Współrzędne punktów *A* i *B* obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}(x-12)^2+y^2=20^2\\3x-4y-36=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=-4\vee x=28\\y=\frac{3}{4}x-9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-4\\y=-12\end{cases}\vee\begin{cases}x=28\\y=12\end{cases}$$

Zatem $A=(-4,-12)$, $B=(28,12)$.

Promień szukanego okręgu jest równy $r=|AS|=\sqrt{(-4-3)^2+(-12-12)^2}=\sqrt{625}=25$.

Stąd wynika, że szukany okrąg ma równanie $(x-3)^2+(y-12)^2=625$.

Przydział punktów za rozwiązanie I sposobem

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający
- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy *AB* albo zapisze, że środek cięciwy *AB*, środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego,

albo
- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:

$$\left(x-3\right)^2+\left(y-12\right)^2=r^2,$$

albo
- obliczy połowę długości cięciwy *AB*: $\frac{1}{2}|AB|=20$,

albo
- obliczy odległość punktu *S* od prostej *AB* i nie interpretuje jej błędnie (np. jako promień szukanego okręgu) i na tym zakończy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający obliczy odległość środka okręgu od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$, np. wykorzystując wzór na odległość punktu od prostej, obliczając wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka *S* na bok zawarty w tej prostej $\frac{|3\cdot 3-4\cdot 12-36|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=15$ lub $\frac{2P_{CDS}}{|CD|}=15$,
gdzie *C* i *D* leżą na prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ oraz
- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy *AB*

lub
- zapisze, że środek cięciwy *AB*, środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego

lub
- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:
  $\left(x-3\right)^2+\left(y-12\right)^2=r^2$

lub
- obliczy połowę długości cięciwy *AB*: $\frac{1}{2}|AB|=20$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ACS*, gdzie *C* oznacza środek cięciwy *AB*: $r^2=20^2+15^2$.
Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zdający zapisze równanie okręgu: $\left(x-3\right)^2+\left(y-12\right)^2=625$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Analizując rozwiązania, można zauważyć, że 40% zdających nie miało żadnego pomysłu na obliczenie promienia szukanego okręgu. Zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego problemu, korzystając ze współrzędnych punktów *A* i *B* otrzymywali równanie, które rzadko rozwiązywali poprawnie do końca. Ci, którzy potrafili wykorzystać informację, że odległość środka *S* okręgu od prostej o równaniu $3x-4y-36=0$ jest równa $\frac{|3\cdot 3-4\cdot 12-36|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-75|}{5}=15$, kończyli zadanie bez problemu. Maksymalną liczbę punktów otrzymało ok.45% zdających.

Zadanie 9. (*5 pkt*)

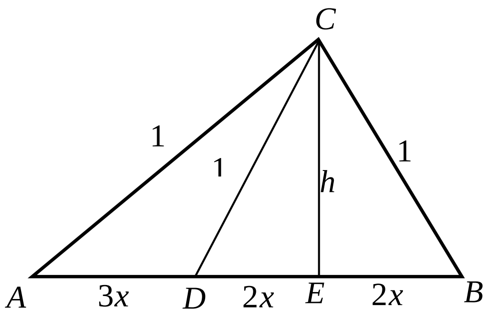
Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku *AB* leży punkt *D* taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta *ABC*.

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,53 – umiarkowanie trudne**

Cztery sposoby przykładowych zapisów rozwiązania zadania:

I sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość *CE* trójkąta *ABC*



Niech $|AD| = 3x$, wtedy $|DB| = 4x$. Trójkąt *DBC* jest równoramienny, gdyż $|BC| = |DC|$, więc $|DE| = |EB| = 2x$. Stosując twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *BEC* i *AEC*, otrzymujemy

$(2x)^2 + h^2 = 10^2$ oraz $(5x)^2 + h^2 = 17^2$, czyli $4x^2 + h^2 = 10^2$ oraz $25x^2 + h^2 = 17^2$.

Stąd otrzymujemy $h^2 = 10^2 - 4x^2$ oraz $25x^2 + 10^2 - 4x^2 = 17^2$.

Rozwiązujemy drugie z równań $21x^2 = 189$, $x^2 = 9$, $x = 3$.

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Pole trójkąta *ABC* jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84$.

Uwaga

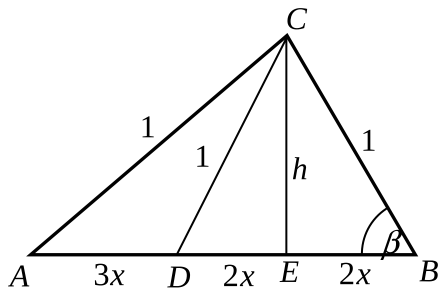
Po obliczeniu *x* mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24,\ p-a = 24-10 = 14,\ p-b = 24-17 = 7,\ p-c = 24-21 = 3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84.$$

II sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość *CE* trójkąta *ABC* i oznaczmy niech $|\sphericalangle ABC| = \beta$.



Niech $|AD| = 3x$, wtedy $|DB| = 4x$. Trójkąt DBC jest równoramienny, gdyż $|BC| = |DC|$, więc $|DE| = |EB| = 2x$. Z trójkąta prostokątnego EBC obliczamy $\cos\beta = \frac{2x}{10} = \frac{x}{5}$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC otrzymujemy $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x \cdot 10 \cdot \cos\beta$.

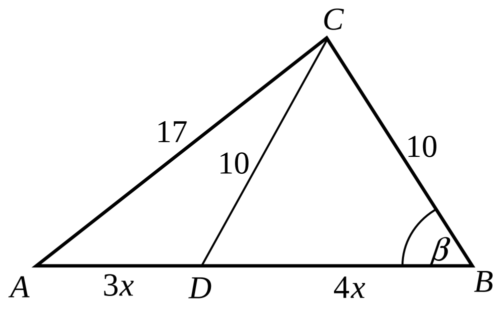
Zatem $289 = 49x^2 + 100 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot \frac{x}{5}$, czyli $189 = 49x^2 - 28x^2$, $189 = 21x^2$, $x^2 = 9$, $x = 3$.

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84$.

III sposób rozwiązania

Oznaczmy $|\angle ABC| = \beta$.



Niech $|AD| = 3x$, wtedy $|DB| = 4x$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC i DBC otrzymujemy $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2\cdot 7x\cdot 10\cdot\cos\beta$ oraz $10^2 = (4x)^2 + 10^2 - 2\cdot 4x\cdot 10\cdot \cos\beta$, czyli $289 = 49x^2 + 100 - 140x\cdot\cos\beta$ oraz $100 = 16x^2 + 100 - 80x\cdot\cos\beta$.

Z drugiego równania obliczamy $\cos\beta = \frac{16x^2}{80x} = \frac{x}{5}$. Stąd i z pierwszego równania dostajemy

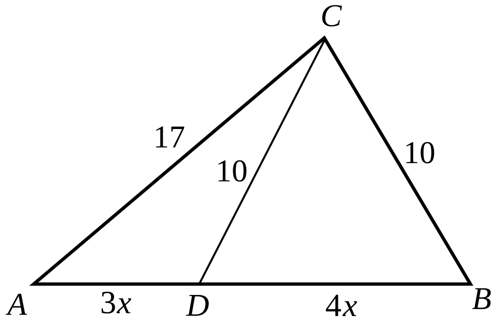
$$189 = 49x^2 - 140x\cdot\frac{x}{5}, 189 = 21x^2,\ x^2 = 9,\ x = 3.$$

Zatem $h = \sqrt{10^2 - 4\cdot 3^2} = \sqrt{100-36} = 8$.

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84$.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość CE trójkąta ABC



Z twierdzenia Stewarta dla trójkąta ABC otrzymujemy kolejno

$$10^2\cdot 7x = 10^2\cdot 3x + 17^2\cdot 4x - 7x\cdot 3x\cdot 4x,$$

$$700x = 300x + 1156x - 84x^3,$$
$$84x^3 = 756x,\ x^2 = 9,\ x = 3.$$

Pole trójkąta *ABC* możemy obliczyć na wiele sposobów:

1) ze wzoru Herona

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24,\ p-a = 24-10 = 14,\ p-b = 24-17 = 7,\ p-c = 24-21 = 3.$$
$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = 84$$

2) z twierdzenia cosinusów obliczamy cosinus jednego z kątów trójkąta, z jedynki trygonometrycznej sinus obliczonego, np.:

$$17^2 = 21^2 + 10^2 - 2\cdot 21\cdot 10\cdot \cos\sphericalangle ABC,\ \cos\sphericalangle ABC = \frac{3}{5},$$
$$\sin\sphericalangle ABC = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = 84$$

3) Obliczamy dowolną wysokość (jak w I sposobie rozwiązania) : $h_{AB} = 8$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot h_{AB} = \frac{1}{2}\cdot 21\cdot 8 = 84.$$

Przydział punktów za rozwiązanie I sposobem

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający zapisze stosunek długości odcinków *AD* i *DB*, np.: $|AD| = 3x$, $|DB| = 4x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć wprowadzoną niewiadomą, np.:

$(2x)^2 + h^2 = 10^2$ oraz $(5x)^2 + h^2 = 17^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający obliczy *x* albo *h*: $x = 3$, $h = 8$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...4 pkt

Zdający obliczy *x* oraz wysokość trójkąta z błędem rachunkowym i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta *ABC*.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC} = 84$.

Komentarz

Zadania z planimetrii w dalszym ciągu sprawiają kłopot zdającym nawet na poziomie rozszerzonym. Około 54% zdających nie miało pomysłu na rozwiązanie tego zadania.

38,19% zdających zapisało poprawnie tylko stosunek długości odcinków *AD* i *DB*, np.: $|AD| = 3x$, $|DB| = 4x$, za co przyznawano im 1 punkt.

Na dalszych etapach rozwiązania najczęściej powtarzające się błędy to:

- błędne zapisywanie twierdzenia Pitagorasa

- błędne zapisywanie funkcji trygonometrycznych lub wzoru cosinusów
- liczne pomyłki rachunkowe.

Do końca rozwiązało i otrzymało 5 punktów 36% zdających.

Zadanie 10. (*4 pkt*)

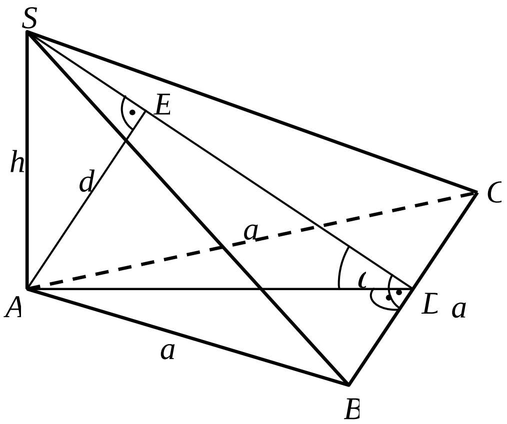
W ostrosłupie *ABCS* podstawa *ABC* jest trójkątem równobocznym o boku długości *a*. Krawędź *AS* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka *A* od ściany *BCS* jest równa *d*. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzane umiejętności

Wyznaczanie związków miarowych w ostrosłupie

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,30 – trudne**

I sposób rozwiązania



Zaznaczamy na rysunku odcinek AE, długość tego odcinka jest odległością wierzchołka *A* od ściany *BCS* i jednocześnie wysokością trójkąta prostokątnego *DAS*, gdzie *D* jest środkiem krawędzi *BC* danego ostrosłupa. Zatem $|AE| = d$.

Ponadto w trójkącie *DAS* wprowadzamy oznaczenia:

α – miara kąta *ADS* i $h = |AS|$ – wysokość ostrosłupa *ABCS*.

Z trójkątów prostokątnych *DAS* i AED, otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|AE|}{|AD|}$.

Ponieważ $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, to $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Przekształcamy równość $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ i wyznaczamy wysokość ostrosłupa *h*.

Otrzymujemy kolejno: $\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{2d}{a\sqrt{3}}$, $\frac{h^2}{4h^2 + 3a^2} = \frac{d^2}{3a^2}$, $h^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2}$

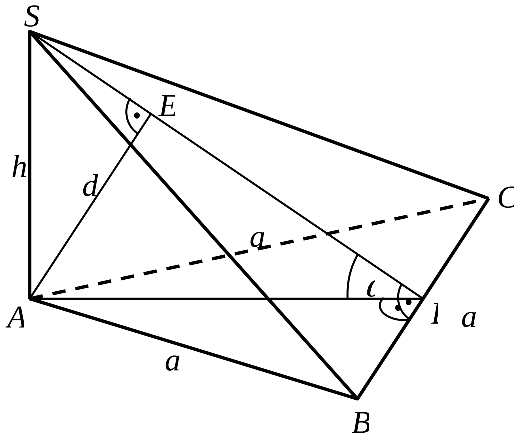
Czyli $h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$. Wyznaczamy objętość ostrosłupa *ABCS*:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Uwaga

Równość $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+\frac{3}{4}a^2}}=\dfrac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ możemy również otrzymać, korzystając z podobieństwa trójkątów DAS i AED.

II sposób rozwiązania



Zaznaczamy na rysunku odcinek AE, długość tego odcinka jest odległością wierzchołka A od ściany BCS i jednocześnie wysokością ostrosłupa $ABCS$ o podstawie BSC.

Zatem objętość V ostrosłupa $ABCS$ jest równa: $V=\frac{1}{3}P_{BSC}\cdot d$.

Obliczmy P_{BSC} pole trójkąta BSC: $P_{BSC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot|SD|$.

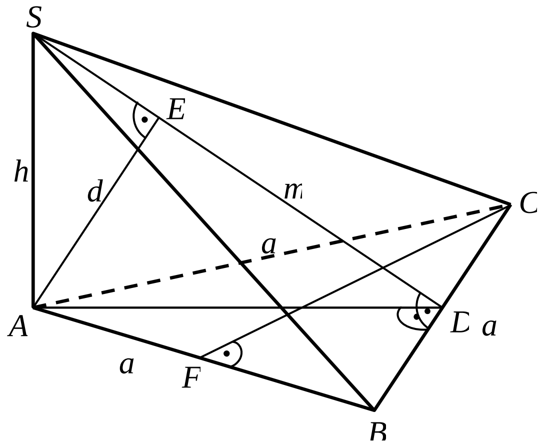
Wprowadzamy oznaczenie: α – miara kąta ADS i z trójkątów prostokątnych DAS i $AA'D$, otrzymujemy: $\cos\alpha=\dfrac{|AD|}{|SD|}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|}$ i $\sin\alpha=\dfrac{|AE|}{|AD|}=\dfrac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Z jedynki trygonometrycznej obliczamy $|SD|$:

$$\left(\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|}\right)^2+\left(\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\right)^2=1,\quad \frac{3a^2}{4|SD|^2}=1-\frac{4d^2}{3a^2},\quad \frac{3a^2}{4|SD|^2}=\frac{3a^2-4d^2}{3a^2},\quad |SD|=\frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa $ABCS$: $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}}\cdot d=\dfrac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

III sposób rozwiązania



Płaszczyzny *ABC* i *ABS* są prostopadłe, trójkąt *ABC* jest równoboczny, więc jego wysokość $|CF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ jest jednocześnie wysokością ostrosłupa opuszczoną na płaszczyznę podstawy *ABS*.

Zatem (1) $V = \frac{1}{3}P_{ABS} \cdot |CF| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADS*

otrzymujemy $|DS|^2 = |AD|^2 + |AS|^2$, $m^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$.

Stąd $m = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2}$.

Odcinek *AE* jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na podstawę *BCS*, więc

$V = \frac{1}{3}P_{BCS} \cdot |DS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}am \cdot d$, (2) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d$.

Porównując prawe strony (1) i (2), otrzymujemy $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d$.

Stąd otrzymujemy kolejno $ah\sqrt{3} = d\sqrt{3a^2 + 4h^2}$, $3a^2h^2 = d^2\left(3a^2 + 4h^2\right)$,

$3a^2h^2 = 3a^2d^2 + 4d^2h^2$, $3a^2h^2 - 4d^2h^2 = 3a^2d^2$, $h^2\left(3a^2 - 4d^2\right) = 3a^2d^2$, $h^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2}$,

$$h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa $V = \frac{1}{3}P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$.

Przydział punktów za rozwiązanie I sposobem

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości *d* prostopadły do płaszczyzny *BCS*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze równość, z której można wyznaczyć *h* w zależności od *a* i *d*, np.:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{3}{4}a^2}}=\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający wyznaczy wysokość h ostrosłupa: $h=\dfrac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający wyznaczy objętość V ostrosłupa: $V=\dfrac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$.

Komentarz

Zadanie to badało umiejętność zbudowania i zrealizowania strategii rozwiązania dość typowego problemu ze stereometrii. Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających – skuteczność zdających mierzona wskaźnikiem łatwości jest równa 0,31. Było to jedno z najtrudniejszych zadań w arkuszu.

Za poprawną interpretację zadania, tzn. zaznaczenie na rysunku odcinka AE, którego długość była odległością wierzchołka A od ściany BCS i jednocześnie wysokością trójkąta prostokątnego DAS, gdzie D był środkiem krawędzi BC danego ostrosłupa, zdający otrzymywał 1 punkt. Ten etap pokonało tylko 34% piszących. Dalsze trudności pojawiły się na etapie znalezienia zależności i zapisania równości, z której można wyznaczyć h w zależności od a i d, np.:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{3}{4}a^2}}=\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\cdot m}{2}\cdot d\text{, gdzie } m=\sqrt{h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Można było także zaobserwować kłopot w wyznaczaniu szukanych wielkości spowodowany tym, że dane nie miały wartości liczbowych.

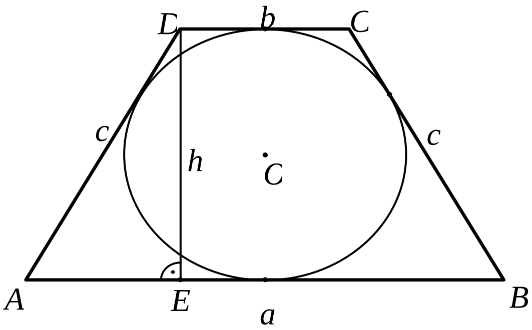
Trzeba wreszcie wspomnieć o grupie zdających (36,63%), którzy nie poradzili sobie z poprawną interpretacją podanego w treści zadania i rysowali ostrosłup z inną wysokością, za co otrzymywali **0 punktów**.

Rozumowanie i argumentacja

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Trapez równoramienny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest opisany na okręgu o promieniu *r*. Wykaż, że $4r^2=|AB|\cdot|CD|$.

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (V.7.c)	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**0,44** - trudne
Przykładowy poprawny zapis rozwiązania: Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia. $\lvert AB\rvert=a$, $\lvert CD\rvert=b$, $\lvert AD\rvert=c$, r - promień okręgu wpisanego w trapez, h - wysokość trapezu.	



Ponieważ trapez jest równoramienny i opisany na okręgu, więc $|AE| = \frac{a-b}{2}$, $h = 2r$ oraz $a + b = 2c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AED:

$c^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, stąd $4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Podstawiając $c = \frac{a+b}{2}$ otrzymujemy $4r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Stosując wzory skróconego mnożenia, otrzymujemy

$$4r^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}\text{, czyli } 4r^2 = \frac{4ab}{4}\text{, skąd } 4r^2 = ab.$$

Przydział punktów za rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, polegało na zapisaniu, że**:** $|AE| = \frac{a-b}{2}$ albo $c = \frac{a+b}{2}$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, gdy zdający wyznaczy obie długości – **2 punkty**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu : $4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na wykazaniu tezy twierdzenia: $4r^2 = ab$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:

Zadanie z planimetrii sprawdzało, czy maturzysta potrafi przeprowadzić proste rozumowanie i je uzasadnić. Prawie wszyscy absolwenci podejmowali próbę rozwiązania tego zadania, chociaż 35% zdających otrzymało **0 punktów** za rozwiązanie.

Przy rozwiązywaniu problemu należało skorzystać, np. z własności trapezu równoramiennego opisanego na okręgu i twierdzenia Pitagorasa i uzasadnić, że $4r^2 = ab$. Niestety, większość zdających, którzy podejmowali próbę rozwiązania (za niewielki postęp – 1p otrzymało 21%), nie mieli pomysłu na kontynuowanie dowodu. Niektórzy wypisywali potrzebne zależności i nie potrafili z nich skorzystać. Maksymalną liczbę punktów za pełne uzasadnienie otrzymało 37% zdających.

5 Podsumowanie i wnioski

Wyniki egzaminu maturalnego świadczą o tym, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności lub zadania podobne do tych, które występowały na poprzednich egzaminach, włącznie z egzaminem próbnym. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych (standardy: IV – *Użycie i tworzenie strategii* oraz V – *Rozumowanie i argumentacja*), większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania. Jednak nie opuszczali tych zadań i podejmowali próby ich rozwiązania. Frakcja opuszczeń na poziomie rozszerzonym nie przekroczyła w tym roku 5%.

W pracy z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych wyboru odpowiedniej strategii rozwiązania. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń i błędy rachunkowe.

Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki jest już od 2011 roku. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym*, a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE po egzaminach maturalnych. Stanowią one materiał do powtarzania wiadomości i ułatwiają przygotowanie do kolejnego egzaminu. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych.

W pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2014 warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- **strategie rozwiązywania zadań zamkniętych** (w dalszym ciągu dla większości zdających jedyną strategią jest ich otwieranie),
- **tworzenie prostych modeli matematycznych** do zadań praktycznych,
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się na algorytmach),
- **dobór optymalnych sposobów (strategii)** rozwiązania problemów matematycznych,
- **argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,**
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku* oraz nowego *Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki* od roku 2014/2015, które są bardzo dobrym źródłem zadań.