Spis treści

1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki 2
2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2011/2012 2
3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki 3
4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki 6
4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej 6
4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego 8
4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego 8
4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści 8
4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych 9
4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników 10
4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego 11
4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego 11
4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych 11
4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych 12
4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników 12
4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych 13
5 Podsumowanie i wnioski 46

1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki

W roku szkolnym 2011/2012 w całym kraju po raz kolejny został przeprowadzony egzamin maturalny dla absolwentów liceów ogólnokształcących (LO), liceów profilowanych (LP), techników (T), uzupełniających liceów ogólnokształcących (LU) i techników uzupełniających (TU).

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem zewnętrznym i ma formę pisemną. Egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot obowiązkowy był zdawany na poziomie podstawowym lub jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Egzamin na poziomie podstawowym trwał 170 minut, a na poziomie rozszerzonymi 180 minut i polegał na rozwiązaniu zawartych w jednym arkuszu egzaminacyjnym zadań egzaminacyjnych.

Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania za zadania z każdego arkusza wynosi 50.

W trakcie egzaminu zdający mógł korzystać z zestawu wybranych wzorów matematycznych przygotowanego przez CKE i kalkulatora z podstawowymi działaniami.
Wyniki egzaminu zamieszczone na świadectwie dojrzałości wyrażone są w skali procentowej.

2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2011/2012

Zgodnie z koncepcją i strukturą egzaminu maturalnego z matematyki zdający egzamin w tym roku musieli zdawać egzamin na poziomie podstawowym i mogli wybrać dodatkowo egzamin z matematyki, ale na poziomie rozszerzonym.

Arkusze zostały tak skonstruowane, aby zbadać stopień opanowania umiejętności określonych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Poziom trudności poszczególnych zadań był zróżnicowany i dostosowany do możliwości absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. Tematyka zadań dotyczyła większości treści zawartych w podstawie programowej matematyki. Zadania egzaminacyjne zawarte w arkuszach pozwalały sprawdzić znajomość i rozumienie podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz stosowanie ich do rozwiązywania problemów matematycznych. Sprawdzały też umiejętność korzystania i przetwarzania podanych informacji oraz umiejętność zastosowania tej wiedzy w praktyce z zakresu wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego. Zadania egzaminacyjne w arkuszu rozszerzonym w większym stopniu niż w arkuszu podstawowym sprawdzały umiejętność rozwiązywania problemów i podawania do nich opisu matematycznego w oparciu o treści obejmujące zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, umiejętność argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

ARKUSZ PODSTAWOWY

Arkusz podstawowy składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał jedną, poprawną odpowiedź spośród czterech) oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać). Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było 6 zadań dwupunktowych, 2 zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

ARKUSZ ROZSZERZONY

Arkusz dla poziomu rozszerzonego składał się z 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich były 3 zadania sześciopunktowe, 2 zadania pięciopunktowe, 4 zadania czteropunktowe i 2 zadania trzypunktowe.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.

3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki

W Tabeli 1. zamieszczono kartotekę arkusza podstawowego, w Tabeli 2. – kartotekę arkusza rozszerzonego. Kartoteki te zawierają informacje o sprawdzanych czynnościach, przyporządkowany im numer standardu, numer treści ze standardu I, których znajomością powinien wykazać się zdający, oraz numery zadań wraz z maksymalną liczbą punktów, które można było uzyskać za ich rozwiązanie.

Tabela 1. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom podstawowy

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard	Typ zadania	Punktacja
1	Wykonanie obliczeń procentowych	(MOD)	ZZ	1 pkt
2	Zastosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych, obliczenie potęgi o wykładnikach wymiernych	(REP)	ZZ	1 pkt
3	Wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia	(REP)	ZZ	1 pkt
4	Obliczenie wartości logarytmu	(REP)	ZZ	1 pkt
5	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do rozwiązania równania typu typu $\lvert x-a\rvert = b$.	(REP)	ZZ	1 pkt
6	Obliczenie sumy rozwiązań równania kwadratowego	(REP)	ZZ	1 pkt

7	Odczytanie z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej jej miejsc zerowych	(INF)	ZZ	1 pkt
8	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej	(REP)	ZZ	1 pkt
9	Odczytanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych	(INF)	ZZ	1 pkt
10	Planowanie i wykorzystanie obliczeń na liczbach rzeczywistych	(INF)	ZZ	1 pkt
11	Wykorzystanie definicji do wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznych danego kąt ostrego	(REP)	ZZ	1 pkt
12	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa	(REP)	ZZ	1 pkt
13	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa	(REP)	ZZ	1 pkt
14	Posługiwanie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków	(INF)	ZZ	1 pkt
15	Wykorzystywanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością boku kwadratu	(REP)	ZZ	1 pkt
16	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta	(INF)	ZZ	1 pkt
17	Wyznaczenie wyrazów ciągu arytmetycznego	(MOD)	ZZ	1 pkt
18	Wyznaczenie wyrazu ciągu określonego wzorem ogólnym	(INF)	ZZ	1 pkt
19	Wyznaczenie objętości sześcianu z wykorzystaniem związków miarowych w sześcianie	(REP)	ZZ	1 pkt
20	Wyznaczenie wysokość stożka z wykorzystaniem funkcje trygonometryczne lub własności kwadratu	(REP)	ZZ	1 pkt
21	Wskazanie równania prostej równoległej do danej	(INF)	ZZ	1 pkt
22	Wykorzystanie pojęcia układu współrzędnych na płaszczyźnie	(INF)	ZZ	1 pkt
23	Zbadanie czy dany punkt spełnia równanie okręgu	(REP)	ZZ	1 pkt
24	Zliczenie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie zasady mnożenia	(REP)	ZZ	2 pkt
25	Obliczenie średniej arytmetycznej i interpretowanie tego parametru w kontekście praktycznym	(REP)	ZZ	2 pkt
26	Rozwiązanie nierówności kwadratowej	(REP)	KO	2 pkt
27	Uzasadnienie -prawdziwość nierówności algebraicznej	(ROZ)	KO	2 pkt
28	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki	(REP)	KO	2 pkt
29	Wykorzystanie własności symetralnej odcinka do wyznaczenia jej równania	(STR)	KO	2 pkt
30	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (zastosowanie rachunku kątów w trójkącie)	(ROZ)	KO	2 pkt
31	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	(MOD)	KO	2 pkt
32	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego	(MOD)	RO	5 pkt
33	Obliczenie objętości wielościanu	(STR)	RO	5 pkt
34	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego	(MOD)	RO	6 pkt

Tabela 2. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom rozszerzony

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard	Typ zadania	Punktacja
1	Rozwiązanie zadania, prowadzącego do równania kwadratowego	MOD	RO	4 pkt
2	Rozwiązanie nierówności wielomianowej	STR	RO	4 pkt
3	Rozwiązanie równania trygonometrycznego	STR	RO	4 pkt
4	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków	STR	RO	6 pkt
5	Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego	STR	RO	6 pkt
6	Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji	STR	RO	6pkt
7	Przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego	ROZ	RO	3 pkt
8	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych	STR	RO	4 pkt
9	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych	STR	RO	5 pkt
10	Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie	STR	RO	5 pkt
11	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń	ROZ	RO	3 pkt

4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki

W województwie kujawsko-pomorskim do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło po raz pierwszy 17151 osób. (18319 - 11r)
Wynik co najmniej 30% punktów za rozwiązanie zadań na poziomie podstawowym uzyskało 85,51%. (77,8% - 2011r)

W Tabeli 3. przedstawiono procent abiturientów z uwzględnieniem typu szkoły, którzy zdali egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, tj. uzyskali co najmniej 30% punktów i zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy w latach 2005 - 2011.

Tabela 3. Porównanie zdawalności w sesjach 2005 - 2011

		woj. kujawsko-pomorskie					
		LO	LP	T	LU	TU	Razem
% osób, które zdały egzamin	2005	93	56	-	-	-	84
	2006	97	84	88	-	-	93
	2007	88	62	63	-	-	76
	2008	92	63	81	-	-	88
	2009	93	72	80	-	-	89
	2010	95	73	84	50	46	89
	2011	87	53	71	28	33	78
	2012	92	64	81	42	30	86

Pojęcie ***zdawalność*** do roku 2006 dotyczyło osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego, a latach 2007-2009 uzyskały 30% dla wybranego poziomu. Od roku 2010 dotyczy osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego. Przy analizie tych wyników należy uwzględnić rozdzielenie poziomów.

Zdawalność w liceach i technikach uzupełniających do 2009 roku miała małą wagę statystyczną ze względu na niewielką liczbę zdających.

4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej

Skala ta pozwala porównać wyniki egzaminu z kilku kolejnych lat. Poza tym uczeń może zinterpretować uzyskany wynik na tle całej populacji zdających i ocenić swoje realne szanse na kontynuowanie nauki.

Tabela 4. Znormalizowana skala dziewięciostopniowa staninowa

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym na skali staninowej (egzamin zdawało 374 916 osób w kraju)

Stanin (klasa wyniku) Nr	Stanin (klasa wyniku) % ogólnych wyników	Nazwa stanina	Wynik (w %)	Komentarz
1	4%	**najniższy**	**0% - 12%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	**bardzo niski**	**13% - 20%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	**niski**	**21% - 30%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	**poniżej średniej**	**31% - 46%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	**średni**	**47% - 64%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	**powyżej średniej**	**65% - 80%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	**wysoki**	**81% - 90%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	**bardzo wysoki**	**91% - 96%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	**najwyższy**	**97% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym na skali staninowej (egzamin zdawało 57 641 osób w kraju)

Stanin (klasa wyniku) Nr	Stanin (klasa wyniku) % ogólnych wyników	Nazwa stanina	Wynik (w %)	Komentarz
1	4%	najniższy	**0% - 6 %**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	bardzo niski	**7% - 16%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	**17% - 26%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	**27% - 40%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	**41% - 54%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	**55% - 68%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	**69% - 80%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	**81% - 90%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	**91% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak wskaźniki łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza z poziomu podstawowego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą absolwentów z województwa kujawsko - pomorskiego.

4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego

Tabela 5. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	LU	T	TU	Razem
Liczba zdających	9895	564	402	6103	187	17151
Liczba zdających, którzy uzyskali co najmniej 30% punktów	9126	362	167	4944	57	14656
Wynik minimalny w punktach	2	3	1	1	1	
Wynik maksymalny w punktach	50	48	49	50	35	
Wynik średni w punktach	33,46	19,07	14,65	25,13	12,73	29,36
Wynik średni w %	66,92	38,14	29,30	50,26	25,47	58,71
Modalna w punktach	46	15	8	24	8	44
Mediana w punktach	35	18	13	25	10	30
Odchylenie standardowe w pkt.	11,51	9,08	8,03	10,83	7,67	12,27
Odchylenie standardowe w %	23,02	18,16	16,06	21,66	15,34	24,55
Zdawalność w %	92,24	64,18	41,54	81,01	30,48	85.51

Analizie statystycznej poddano wyniki 17151 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2012 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 29,36 punktów, co stanowi 59% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu podstawowego. Rozstęp wyników wynosi 50 i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) - 12,27 oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 17 – 42 punktów. Dla porównania w roku 2011 wartość miary rozrzutu wynosiła (odchylenie standardowe) – 11,7, co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 13 – 36 punktów.

Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących i techników są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół. W arkuszu rozszerzonym różnice te są dużo większe.

4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści

Tabela 6. **Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu podstawowego**

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1	Liczby rzeczywiste	1, 2, 3, 4, 5, 10,	6	0,70	0, 26
2	Wyrażenia algebraiczne	27,	2	0,19	0,31
3	Równania i nierówności	6, 26, 28, 34	10	0,52	0,34
4	Funkcje	7, 8, 9,	3	0,73	0,29
5	Ciągi liczbowe	17,18, 32,	6	0,73	0,35
6	Trygonometria	11,	1	0,67	0,47

7	Planimetria	12, 13, 14, 15, 16, 30,	7	0,60	0,21
8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	21, 22, 23, 29,	5	0,48	0,33
9	Stereometria	19, 20, 33	6	0,54	0,36
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	24, 25, 31,	4	0,63	0,30

Powyższe wyniki wskazują, że uczniowie zdający egzamin na poziomie podstawowym rozwiązują zadania z poszczególnych działów na poziomie około 50 procent i więcej. Najniższy wskaźnik łatwości z dział: „Wyrażenia algebraiczne", jest spowodowany tym, że jest to zadanie typu „*Uzasadnij…*". W dalszym ciągu zadania z „Geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej" sprawiają zdającym duże trudności. Najłatwiejsze są dla nich zadania z liczb rzeczywistych i funkcji. Wynika to z faktu, że zadania tego typu występowały na niższych etapach edukacji i egzaminach.

4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 7. Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu podstawowego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	0,79	0,22
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	0,70	0,25
3. Modelowanie matematyczne.	0,53	0,33
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,40	0,38
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,14	0,26

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najłatwiejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie I, w którym zdający wykorzystuje i tworzy informacje. W dalszym ciągu najtrudniejszy jest standard V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z obszarów przedstawia tabela 8.

Tabela 8. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7, 9, 10, 14, 16, 18, 21, 22		8	16%
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 23, 24, 25	26, 28,	19	38%
3. Modelowanie matematyczne.	1, 17	31, 32, 34	13	26%
4. Użycie i tworzenie strategii.		29, 33	6	12%
5. Rozumowanie i argumentacja.		27, 30,	4	8%

4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny podstawowy był dla zdających trudny. Bardzo trudne okazały się zadania na dowodzenie: 25 i 29.

Stopień wykonania zadań z arkusza podstawowego przedstawiono w Tabelach 9 i 10.

Tabela 9. Łatwość zadań arkusza podstawowego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,49	0,55	0,80	0,67	0,90	0,71	0,85	0,59	0,76	0,82	0,67

Numery zadań	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Łatwość zadań	0,87	0,84	0,84	0,59	0,84	0,74	0,79	0,66	0,79	0,65	0,74

Numery zadań	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Łatwość zadań	0,46	0,68	0,87	0,71	0,19	0,57	0,28	0,10	0,48	0,71	0,45	0,38

Rysunek 1. Łatwość zadań arkusza podstawowego

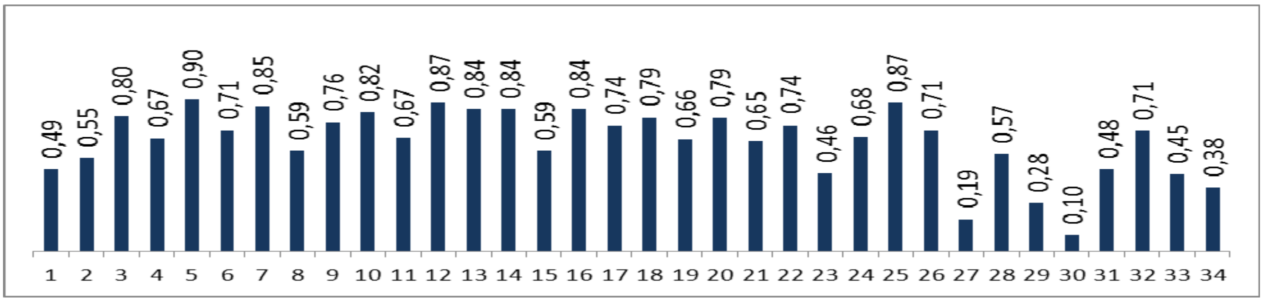


Tabela 10. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza podstawowego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	27,30	2
Trudne	0,20-0,49	1, 23, 29, 31, 33, 34	6
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	2, 4, 8, 11, 15, 19, 21, 24, 28	9
Łatwe	0,70-0,89	3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 25, 26, 32	16
Bardzo łatwe	0,90-1,00	5	1

W arkuszu dla poziomu podstawowego znalazły się zadania od bardzo trudnych po bardzo łatwe, co wskazuje na duże zróżnicowanie poziomu zadań. Spośród zadań najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte: 5 – równanie z wartością bezwzględną, które można było rozwiązać *strategią sprawdzania*, 12 – planimetria, na zastosowanie twierdzenia Pitagorasa oraz 25 – na korzystanie ze średniej arytmetycznej.

4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak np. wskaźnik łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza rozszerzonego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą całej grupy abiturientów, którzy wybrali matematykę na poziomie rozszerzonym.

4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego

W Tabeli 11. przedstawiono wartości wybranych wskaźników statystycznych (wynik maksymalny, minimalny i średni wyrażone w punktach i procentach) uzyskane przez zdających za rozwiązanie zadań z arkusza rozszerzonego.

Tabela11. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających na poziomie rozszerzonym

Parametr statystyczny	Zdający				
	LO	LP	LU	T	Razem
Liczba zdających	1 808	6	1	266	2 081
Wynik minimalny w punktach	0	1	5	0	0
Wynik maksymalny w punktach	50	37	5	49	50
Wynik średni w punktach	27,08	11,17	5,00	16,51	25,67
Wynik średni w %	54,16	22,33	10,00	33,02	51,35
Mediana w %	54	2	10	32	54
Modalna w %	54	15	10	32	52
Odchylenie standardowe w pkt	11,85	11,91	0,00	9,79	12,16
Odchylenie standardowe w %	23,70	23,82	0,00	19,58	24,32

Analizie statystycznej poddano wyniki 2081 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2012 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 25,67punktów, co stanowi 51% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu rozszerzonego. Rozstęp wyników wynosi 50 punktów i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) –12,16 – oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 14-38 punktów. Dla porównania w roku 2011 wartość miary rozrzutu wynosiła 13,2 – co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 11-37 punktów.

4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych

Tabela 12. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu rozszerzonego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1.	Liczby rzeczywiste	1,	4	0,83	0,34
2.	Wyrażenia algebraiczne				
3.	Równania i nierówności	2, 4, 7,	13	0,48	0,31
4.	Funkcje				
5.	Ciągi liczbowe	5,	6	0,50	0,33
6.	Trygonometria	3,	4	0,66	0,37
7.	Planimetria	9,	5	0,50	0,42
8.	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	6,	6	0,37	0,38
9.	Stereometria	10,	5	0,74	0,37
10.	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	8, 11	7	0,29	0,30

Powyższe wyniki wskazują, że dla zdających najtrudniejszymi działami matematyki są: „Elementy statystyki opisowej, teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka" (0,29) i „Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka" – dowód (0,37).

4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 13 Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu rozszerzonego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
3. Modelowanie matematyczne.	0,83	0,34
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,52	0,26
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,27	0,33

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najtrudniejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.
Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia Tabela 14.

Tabela 14. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
3. Modelowanie matematyczne.	1,	4	8%
4. Użycie i tworzenie strategii.	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10	40	80%
5. Rozumowanie i argumentacja.	7, 11	6	12%

4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny rozszerzony był dla zdających umiarkowanie trudny (0,51).
Najtrudniejsze okazały się zadania:

- 11. – przeprowadzenie dowodu z rachunku prawdopodobieństwa
- 7. – przeprowadzenie dowodu algebraicznego,
- 8. – obliczenia z kombinatoryki,

Najłatwiejsze okazały się zadania:

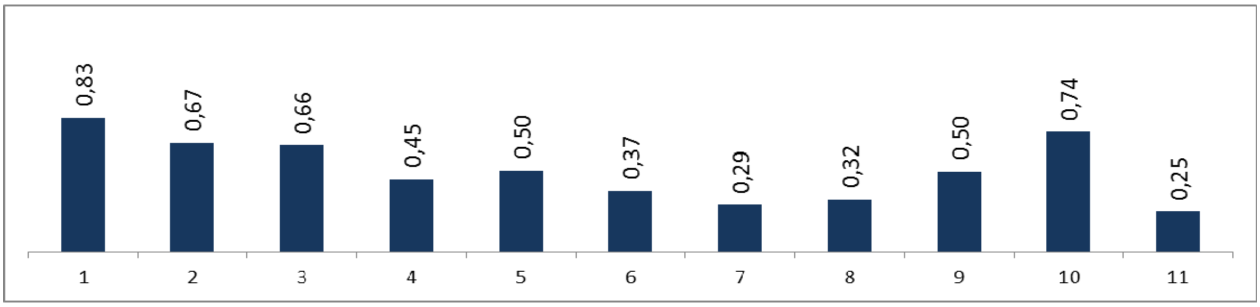
- 1. – rozwiązanie zadania, prowadzącego do równania kwadratowego
- 10. – znalezienie związków miarowych w ostrosłupie .

Stopień wykonania zadań z arkusza rozszerzonego przedstawiono w Tabelach 15. i 16.

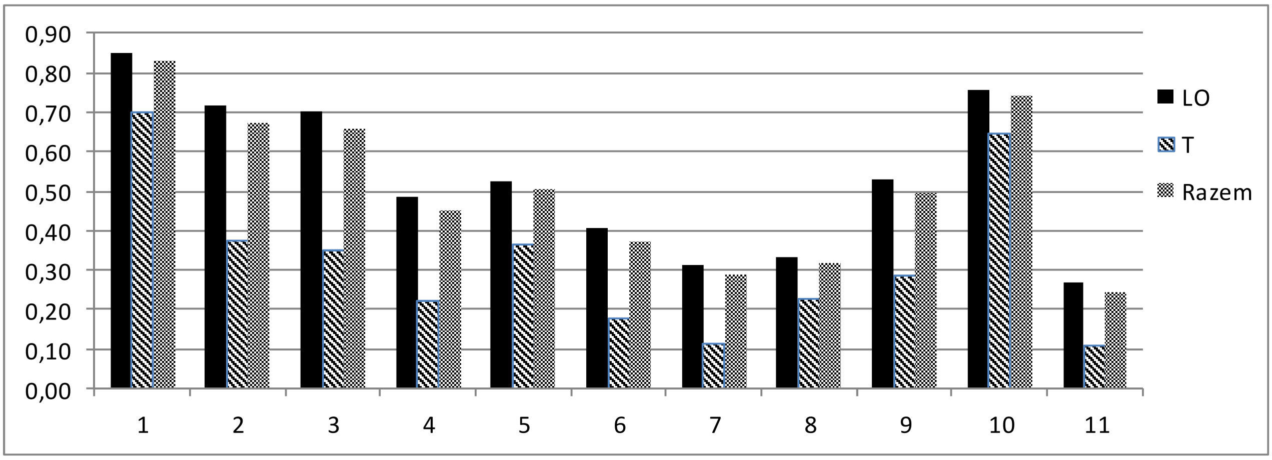
Tabela15. Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,83	0,67	0,66	0,45	0,50	0,37	0,29	0,32	0,50	0,74	0,25

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego



Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego z podziałem na szkoły



Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu rozszerzonego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół.

Tabela 16. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza rozszerzonego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	–	--
Trudne	0,20-0,49	4, 6, 7, 8, 11	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	2, 3, 5, 9	4
Łatwe	0,70-0,89	1, 10	2
Bardzo łatwe	0,90-1,00	–	–

Spośród zadań umieszczonych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego nie było zadań bardzo trudnych i bardzo łatwych.

4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych

Analizy zadań zamkniętych dokonano ze względu na najbardziej optymalne strategie rozwiązania danych zadań

Wskaźniki łatwości zadań w województwie są porównywalne z krajowymi i typowe błędy w rozwiązaniach były analogiczne jak w skali kraju.

Analiza jakościowa poszczególnych zadań wykazuje, że zadania egzaminacyjne dobrze ilustrują standardy wymagań egzaminacyjnych.

Poziom podstawowy

Zadania zamknięte

STRATEGIA OTWIERANIA

Strategia otwierania polega na tym, że uczeń rozwiązuje zadanie jako otwarte, a otrzymany wynik odszukuje wśród zaproponowanych odpowiedzi.

Zadanie 1. ***(1 pkt)***
Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44% **B.** 50% **C.** 56% **D.** 60%

Sprawdzana umiejętność Wykonanie obliczeń procentowych (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,49 – **trudne**	0,54	0,29	0,33	0,43	0,22
Poprawna odpowiedź: **A.**					

Zadanie 2. ***(1 pkt)***

Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. -8 **B.** -4 **C.** 2 **D.** 4

Sprawdzana umiejętność Zastosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,55 – **umiarkowanie trudne**	0,64	0,33	0,34	0,45	0,28
Poprawna odpowiedź: **B.**					

Zadanie 3. ***(1 pkt)***
Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $19-10\sqrt{2}$ **B.** $17-4\sqrt{2}$ **C.** $15+14\sqrt{2}$ **D.** $19+6\sqrt{2}$

Sprawdzana umiejętność Wykonanie obliczeń na liczbach wymiernych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,80 – **łatwe**	0,88	0,58	0,49	0,73	0,32
Poprawna odpowiedź: **A.**					

Zadanie 4. ***(1 pkt)***
Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Sprawdzana umiejętność Obliczenie wartości logarytmu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,67 – **umiarkowanie trudne**	0,77	0,44	0,36	0,55	0,26
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 10 ***(1 pkt)***
Liczba $\mathrm{tg}\,30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa

A. $\sqrt{3}-1$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

Sprawdzana umiejętność Planowanie i wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,82 – **łatwe**	0,88	0,66	0,48	0,75	0,50
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 12. ***(1 pkt)***
W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6 **B.** $2\sqrt{21}$ **C.** $2\sqrt{29}$ **D.** 14

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,87 – **łatwe**	0,92	0,72	0,58	0,84	0,54
Poprawna odpowiedź: **B**.					

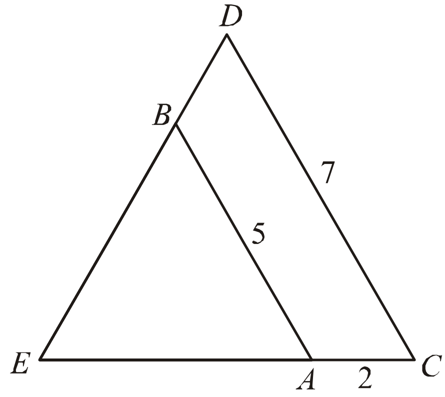
Zadanie 14. ***(1 pkt)*** **–** (również *S*TRATEGIA SPRAWDZANIA)
Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5



Sprawdzana umiejętność Posłużenie się własnościami figur podobnych do obliczenia długości odcinków (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,84 – **łatwe**	0,86	0,76	0,74	0,81	0,75
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 15. ***(1 pkt)***
Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

A. 25 **B.** 50 **C.** 75 **D.** 100

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością jego boku (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,59 – **umiarkowanie trudne**	0,69	0,30	0,26	0,49	0,25
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 17. ***(1 pkt)***
Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 40° **B.** 50° **C.** 60° **D.** 70°

Sprawdzana umiejętność Obliczenie wyrazów ciągu arytmetycznego (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,74 – **łatwe**	0,81	0,49	0,44	0,67	0,42
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 18. ***(1 pkt)***
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ **B.** $\frac{3}{25}$ **C.** $-\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{7}{25}$

Sprawdzana umiejętność
Obliczenie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,79 – **łatwe**	0,86	0,61	0,49	0,72	0,40

Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 19. ***(1 pkt)***
Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 6 **B.** 8 **C.** 24 **D.** 64

Sprawdzana umiejętność (standard II)
Obliczenie objętości sześcianu z wykorzystaniem związków miarowych w sześcianie.

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,66 – **umiarkowanie trudne**	0,76	0,38	0,27	0,56	0,29

Poprawna odpowiedź: **B**.

STRATEGIA SPRAWDZANIA

Strategia sprawdzania warunków polega na tym, że uczeń sprawdza, dla której z zaproponowanych odpowiedzi spełnione są wszystkie warunki zadania.

Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1| = 4x$.

A. $x=-1$ **B.** $x=1$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-2$

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do rozwiązania równania (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,90 – **bardzo łatwe**	0,92	0,82	0,74	0,87	0,68

Poprawna odpowiedź: **B**.

Zadanie 7. ***(1 pkt)*** –– (również **Strategia eliminacji i preferencji**)
Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y=-3(x-7)(x+2)$ są

A. $x=7,\ x=-2$ **B.** $x=-7,\ x=-2$ **C.** $x=7,\ x=2$ **D.** $x=-7,\ x=2$

Sprawdzana umiejętność
Odczytanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej z postaci iloczynowej (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,85 – **łatwe**	0,91	0,75	0,61	0,81	0,53

Poprawna odpowiedź: **A**.

Zadanie 23. ***(1 pkt)***

Na okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 4$ leży punkt

A. $A = (-2,5)$ **B.** $B = (2,-5)$ **C.** $C = (2,-7)$ **D.** $D = (7,-2)$

Sprawdzana umiejętność Zbadanie, czy dany punkt spełnia równanie okręgu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,46 – **trudne**	0,57	0,22	0,14	0,33	0,13
Poprawna odpowiedź: **B**.					

Zadanie 25. ***(1 pkt)***
Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa

A. 400 zł **B.** 500 zł **C.** 600 zł **D.** 700 zł

Sprawdzana umiejętność Obliczenie średniej arytmetycznej i interpretowanie tego parametru w kontekście praktycznym (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,87 – **łatwe**	0,91	0,73	0,63	0,84	0,60
Poprawna odpowiedź: **D**.					

STRATEGIA ELIMINACJI

Strategia eliminacji i preferencji polega na odrzuceniu tych odpowiedzi, które nie spełniają warunków zadania, począwszy od odpowiedzi najbardziej odbiegających od warunków zadania, kończąc na tych najbardziej zbliżonych.

Zadanie 8. ***(1 pkt)***
Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek

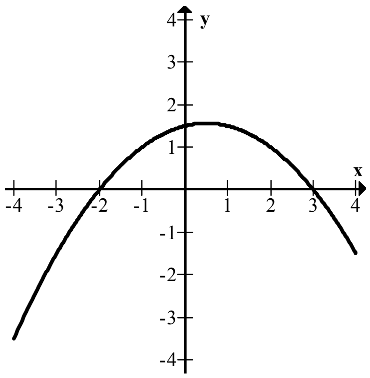
A. $f(1) > 1$ **B.** $f(2) = 2$ **C.** $f(3) < 3$ **D.** $f(4) = 4$

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,59 – **umiarkowanie trudne**	0,66	0,41	0,44	0,51	0,39
Poprawna odpowiedź: **A**.					

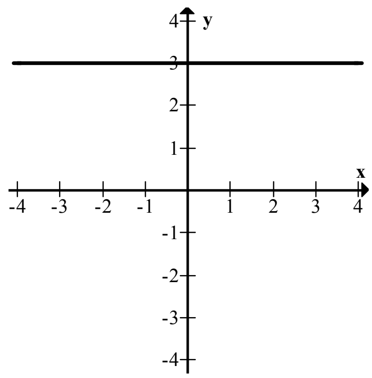
Zadanie 9. ***(1 pkt)***

Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

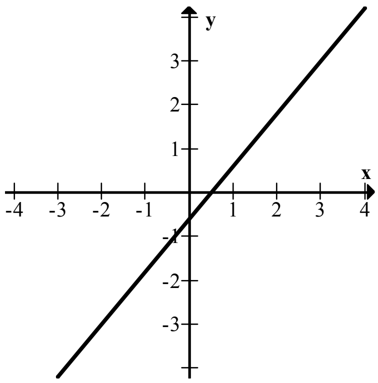
A.



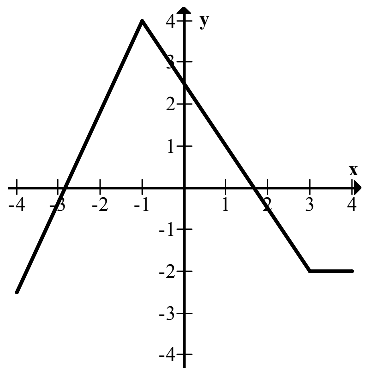
B.



C.



D.



Sprawdzana umiejętność Odczytanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,76 – **łatwe**	0,83	0,55	0,42	0,69	0,43
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 20. ***(1 pkt)***

Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Wysokość tego stożka jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 16π **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 8π

Sprawdzana umiejętność Wyznaczenie wysokości stożka z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych lub własności kwadratu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,79 – **łatwe**	0,85	0,61	0,51	0,72	0,44
Poprawna odpowiedź: **A**.					

Zadanie 22. ***(1 pkt)***

Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi Oy. Punkt C ma współrzędne

A. $(-5, -2012)$ **B.** $(-2012, -5)$ **C.** $(-5, 2012)$ **D.** $(-2012, 5)$

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie pojęcia układu współrzędnych na płaszczyźnie (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,74 – **łatwe**	0,80	0,58	0,48	0,69	0,48
Poprawna odpowiedź: **A.**					

Zadanie 24. ***(1 pkt)***

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru.
Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19

Sprawdzane umiejętności (standard II). Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, zastosowanie zasady mnożenia					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,68 – **umiarkowanie trudne**	0,73	0,52	0,41	0,62	0,48
Poprawna odpowiedź: **C.**					

ŁĄCZENIE STRATEGII

Łączenie strategii (strategia mieszana) polega na tym, że uczeń rozwiązuje zadanie różnymi strategiami, np. zaczyna od eliminacji dwóch odpowiedzi, a potem otwiera zadanie albo sprawdza czy która z pozostałych odpowiedzi spełnia warunki zadania.

Zadanie 11. ***(1 pkt)***

W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{13}{12}$

Sprawdzana umiejętność (standard II) Wykorzystanie definicji do wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,67 – **umiarkowanie trudne**	0,75	0,44	0,36	0,59	0,26
Poprawna odpowiedź: **B.**					

Zadanie 13. ***(1 pkt)***
W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy

A. $16\sqrt{6}$ **B.** $14\sqrt{6}$ **C.** $12+4\sqrt{6}$ **D.** $12+2\sqrt{6}$

Sprawdzane umiejętności (standard II) Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,84 – **łatwe**	0,89	0,68	0,58	0,79	0,52
Poprawna odpowiedź: **D**.					

Zadanie 15. ***(1 pkt)***
Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

A. 25 **B.** 50 **C.** 75 **D.** 100

Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością jego boku (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,59 – **umiarkowanie trudne**	0,69	0,30	0,26	0,49	0,25
Poprawna odpowiedź: **B**.					

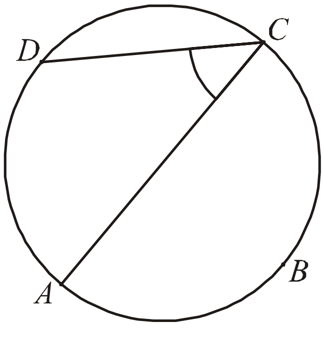
Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°



Sprawdzana umiejętność Wykorzystanie związku między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,84 – **łatwe**	0,87	0,73	0,70	0,81	0,69
Poprawna odpowiedź: **C**.					

Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x-6y+7=0$.

A. $y=\frac{1}{2}x$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x$ **C.** $y=2x$ **D.** $y=-2x$

Sprawdzana umiejętność Wskazanie równania prostej równoległej do danej (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,65 – **umiarkowanie trudne**	0,73	0,45	0,43	0,54	0,28
Poprawna odpowiedź: **A.**					

Zadania otwarte

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania (z uwzględnieniem kryteriów oceniania zdających ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki) zawartych w *Kryteria oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:

Zadanie 26. ***(2 pkt)***
Rozwiąż nierówność $x^2+8x+15>0$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie nierówności kwadratowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,71 – **łatwe**	0,79	0,53	0,38	0,64	0,24

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2+8x+15$.

Obliczamy $\Delta=64-4\cdot1\cdot15=4$ i stąd $x_1=\frac{-8-2}{2}=-5$ oraz $x_2=\frac{-8+2}{2}=-3$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $3x^2-10x+3\le0$: $(-\infty,-5)\cup(-3,\infty)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x=-5$, $x=-3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo
- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2+8x+15$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+3)(x+5)>0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- popełni błąd przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-5)\cup(-3,\infty)$

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się

matematyki

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -5, x_2 = -3$ i zapisze, np. $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$ popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, -3) \cup (-5, \infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz

Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających i było jednym z dwóch najłatwiejszych zadań otwartych w tym zestawie egzaminacyjnym.

Tylko 55% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania.

Część zdających prawidłowo wyznaczała pierwiastki trójmianu kwadratowego, ale błędnie podawała zbiór rozwiązań nierówności, np. wskazując obliczone pierwiastki jako zbiór rozwiązań tej nierówności. Dość często pojawiały się rozwiązania, w których zdający błędnie zapisywali zbiór rozwiązań nierówności, np. w postaci przedziału $(-5, -3)$. Odnotowano również rozwiązania, w których zdający popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.

Grupa około 12% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie tej nierówności kwadratowej, mimo iż ten typ zadania pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.

Zadania 27. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

Sprawdzana umiejętność

Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,19 – **bardzo trudne**	0,27	0,04	0,01	0,09	0,01

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Mnożymy obie strony nierówności przez 6:

$$2(a+b+c) > 3(a+b)$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2c > a+b$$

Uzyskana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej, zatem wystarczy wykazać jej prawdziwość. Z założenia wiemy, że $c > a$ oraz $c > b \cdot$ Wobec tego

$$2c = c + c > a + b$$

Co należało wykazać.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

jeśli przekształci podaną nierówność do postaci $2c > a+b$ lub $(c-a)+(c-b) > 0$, lub $\frac{-a-b+2c}{6} > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

jeśli przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.
Komentarz Zadanie okazało się dla absolwentów LO trudne, a dla pozostałych zdających **bardzo trudne**. Zadania typu *Wykaż…* z reguły budzą obawy zdających. Tak było również w tym przypadku. Ponad 20% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, a 70% nie uzyskało nawet 1 punktu. Tylko 7% maturzystów poprawnie wykorzystało założenia i uzasadniło prawdziwość podanej nierówności algebraicznej. Jednak najczęściej zdający przekształcali podaną nierówności do postaci $2c > a+b$ i na tym kończyli dowód. Za takie rozwiązanie uzyskiwali 1 punkt. Warto podkreślić, że odnotowano również nietypowe, inne od opisanych w schemacie, sposoby rozwiązania. Oto przykład rozumowania przedstawionego przez jednego ze zdających: Jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0<a<b<c$, to możemy je zapisać w postaci $a,\ b=a+x,\ c=a+y$, przy czym $y>x>0$. Udowodnimy, że $\frac{a+a+x+a+y}{3} > \frac{a+a+x}{2}$. Przekształcamy tożsamościowo tę nierówność: $\frac{3a+x+y}{3} > \frac{2a+x}{2}$ $6a+2x+2y>6a+3x$, a stąd $2y>x$, co jest prawdą, ponieważ $y>x$. Nadal pojawiały się rozwiązania, w których zdający dowodzili prawdziwości tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowali na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb spełniających założenie.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Liczby $x_1=-4$ i $x_2=3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+4x^2-9x-36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,57 – **umiarkowanie trudne**	0,69	0,34	0,18	0,44	0,16
Przykładowy poprawny zapis rozwiązania Przedstawiamy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania: $W(x)=x^3+4x^2-9x-36=x^2(x+4)-9(x+4)=(x+4)(x-3)(x+3)$. Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są zatem $x_1=-4$, $x_2=3$ oraz $x_3=-3$. Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba $x=-3$.					
Przydział punktów za rozwiązanie zadania **Zdający otrzymuje ....1 pkt** gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynu, np.: $W(x)=(x^2-9)(x+4)$ lub $W(x)=(x+4)(x-3)(x+3)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy. **Zdający otrzymuje ....2 pkt** gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu: $x=-3$.					

Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Mimo iż ten typ zadania pojawiał się na egzaminach maturalnych (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie CKE i OKE), to tylko 56% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali zdający nadal popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania:

- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x+4)-9(x-4)=(x+4)(x^2-9)$,
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x+4) \quad 9(x+4)$ (pomijanie znaku działania),
- niewłaściwego rozkładu na czynniki, np. $x^2(x+4)-9(x-4)=(x+4)(x-4)(x-3)(x+3)$,
- niewłaściwego dzielenia $x^2+4x-9=36$ i rozwiązywania równania $x^2+4x-45=0$, obliczania Δ i pierwiastków równania.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***
Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A=(-2,2)$ i $B=(2,10)$.

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie własności symetralnej odcinka do wyznaczenia jej równania (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,28 – **trudne**	0,39	0,05	0,04	0,15	0,02

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $\frac{10-2}{2-(-2)}=2$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* jest równy $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Symetralna odcinka AB ma równanie $y=-\frac{1}{2}x+b$. Punkt $S=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{2+10}{2}\right)=(0,6)$ jest środkiem odcinka AB.
Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $6=-\frac{1}{2}\cdot 0+b$. Stąd $b=6$, a więc symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-\frac{1}{2}x+6$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

- gdy poprawnie wyznaczy współrzędne środka odcinka *AB*: $S=(0,6)$ oraz współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $a=2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu współrzędnych środka odcinka albo współczynnika kierunkowego prostej *AB* i konsekwentnie wyznaczy równanie symetralnej.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka *AB*: $y=-\frac{1}{2}x+6$ lub $x+2y-12=0$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki
Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów i wyznaczy konsekwentnie równanie symetralnej odcinka *AB,* to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Komentarz
Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla ogółu zdających.
Ponad 68% maturzystów nie otrzymało żadnego punktu za rozwiązanie tego zadania.

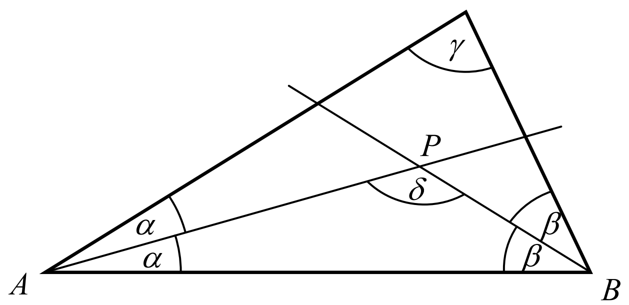
Zdający, którzy zaczynali rozwiązywać to zadanie, liczyli tylko długość odcinka *AB,* co zupełnie nie wiązało się z treścią zadania. Również pisali równanie prostej przechodzącej przez punkty *A* i *B*, ale nie umieli tego wykorzystać do napisania równania symetralnej odcinka.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***
W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczne kątów *A* i *B*. Dwusieczne te przecinają się w punkcie *P*. Uzasadnij, że kąt *APB* jest rozwarty.

Sprawdzana umiejętność
Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,10 – **bardzo trudne**	0,14	0,00	0,00	0,03	0,00

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Niech $|\angle BAC| = 2\alpha$, $|\angle ABC| = 2\beta$, $|\angle ACB| = \gamma$, $|\angle APB| = \delta$.



Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest 180°, więc w trójkącie *ABC* mamy $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$.

Ponieważ $\gamma > 0^\circ$, więc $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta < 90^\circ$.

W trójkącie *ABP* mamy $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$.

Stąd i z otrzymanej nierówności $\alpha + \beta < 90^\circ$ wynika, że $\delta > 90^\circ$.
Oznacza to, że kąt *APB* jest kątem rozwartym.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt *APB* jest kątem rozwartym.

Komentarz
Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne i jednocześnie było dla nich najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.
Rozwiązywanie zadań z planimetrii, a w szczególności dotyczących przeprowadzenia dowodu geometrycznego, stanowią dużą trudność, bez względu na stopień ich złożoności. W omawianym zadaniu zdający mieli przeprowadzić proste rozumowanie oparte na własnościach dwusiecznych kątów trójkąta.
Ponad 19% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, a tylko 10% maturzystów poprawnie wykorzystało założenia i uzasadniło, że kąt *APB* jest rozwarty. Jednak najczęściej zdający zapisywali, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest 180° i nie umieli tego wykorzystać.

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Sprawdzana umiejętność

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania dla**				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,48 – **trudne**	0,56	0,24	0,12	0,41	0,13

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) dwóch liczb ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6, gdy:

- jedna z tych liczb jest równa 6 (wówczas druga jest dowolna)

albo

- jedną z liczb jest 3, a drugą jest 2 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa $|A| = (2 \cdot 7 - 1) + 2 \cdot 2 = 17$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 17$

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Komentarz

Rozwiązując zadanie zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa” to najczęściej stosowany sposób rozwiązania zadania. Nie wymagało ono stosowania wzorów kombinatorycznych. W większości zdający poprawnie stosowali definicję klasyczną prawdopodobieństwa, chociaż odnotowano również niepoprawne stosowanie klasycznej definicji - dzielenie mocy zbioru Ω przez moc zbioru A.

W wielu przedstawionych rozwiązaniach zabrakło refleksji i poprawienia rozwiązania, gdy otrzymany wynik prawdopodobieństwa zdarzenia był większy od 1.

Zadanie 32. ***(4 pkt)***
Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Sprawdzana umiejętność
Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,71 – łatwe	0,80	0,47	0,22	0,63	0,16

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich: $x = \frac{9+19}{2} = 14$.

Wiemy, że ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem jego iloraz jest równy $q = \frac{42}{14} = 3$.

Wobec tego $y = 3 \cdot 42 = 126$ i $z = 126 \cdot 3 = 378$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub $2x = 9 + 19$ lub $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = 3$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

Komentarz
Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających. Zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego), trudności pojawiły się na etapie rozwiązywania układu równań.
Najczęściej powtarzające się błędy w rozwiązaniach zadania, to:
- błędy rachunkowe w przekształceniach
- sprawdzanie warunków zadania dla kilku wybranych wartości x i y i na podstawie tych obliczeń formułowanie odpowiedzi, często błędnej
- mylenie ciągów
- błędy rachunkowe przy próbach wyznaczania różnicy ciągu arytmetycznego lub ilorazu ciągu geometrycznego

Często pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali wyniki (bez obliczeń): $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$. Za takie rozwiązanie zdający otrzymywali **1 punkt.**

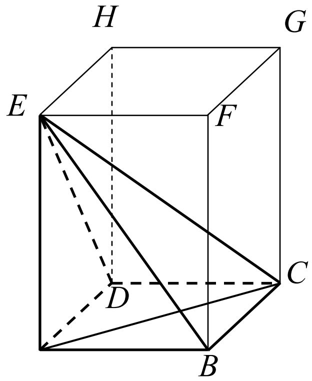
Zadanie 33. ***(4 pkt)***
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDEFGH* przekątna *AC* podstawy ma długość 4. Kąt *ACE* jest równy $60°$. Oblicz objętość ostrosłupa *ABCDE* przedstawionego na poniższym

rysunku.

Sprawdzana umiejętność
Obliczenie objętości wielościanu (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,45 – **trudne**	0,55	0,18	0,07	0,36	0,08

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania



a) Obliczenie pola podstawy ostrosłupa

Podstawa *ABCD* ostrosłupa jest kwadratem o boku *AB*. Stosując wzór na przekątną kwadratu, mamy $4 = |AB|\sqrt{2}$, stąd $|AB| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy pole *P* podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

b) Obliczenie wysokości *AE* ostrosłupa

W trójkącie *EAC* mamy $|AC| = 4$ i $|\sphericalangle ACE| = 60^\circ$, stąd $|AE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

c) Obliczenie objętości ostrosłupa

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Obliczenie wysokości *AE* ostrosłupa: $|AE| = 4\sqrt{3}$ albo obliczenie pola *P* podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Obliczenie pola podstawy i wysokości ostrosłupa.

Uwaga
Jeśli zdający obliczy jedną z tych wielkości z błędem rachunkowym, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Nie obniżamy punktacji zadania za błędy nieuwagi, np. gdy zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu objętości podstawił błędną wartość.

Komentarz

Zadanie okazało się trudne dla ogółu zdających Tylko 30% zdających otrzymało za rozwiązanie tego zadania komplet punktów, a 21% otrzymało tylko 1 punkt. Mimo podanego rysunku bryły, zdający błędnie rysowali ostrosłup i błędnie interpretowali podane długości.

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Sprawdzana umiejętność

Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do rozwiązania równania kwadratowego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania dla				
	LO	LP	LU	T	TU
0,38 – **trudne**	0,50	0,09	0,03	0,23	0,03

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, v – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.

Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu:

$$\begin{cases} t \cdot v = 210 \\ (t-1)\cdot(v+24) = 210 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy go do postaci równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.: $4t^2 - 4t - 35 = 0$.

Stąd otrzymujemy $t_1 = \frac{4-24}{8} = -\frac{5}{2}$ lub $t_2 = \frac{4+24}{8} = \frac{7}{2} = 3,5$. Zauważamy, że t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny: $3,5 - 1 = 2,5$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 pkt**

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$$(t-1)(v+24) = 210$$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, a v średnią prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę,

lub

$$(t+1)(v-24) = 210$$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg pospieszny, a v średnią prędkość pociągu pospiesznego w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zapisanie układu równań z niewiadomymi *v* i *t*, np.:

$$\begin{cases} t\cdot v = 210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t\cdot v = 210 \\ (t+1)\cdot(v-24)=210 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą *v* lub *t*, np.:

$$(t-1)\cdot\left(\frac{210}{t}+24\right)=210 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{210}{v}-1\right)\cdot(v+24)=210 \quad \text{lub} \quad 24(t-1)\cdot t=210\,.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą *v* lub *t* z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie czasu pokonania drogi przez pociąg pospieszny

albo

- obliczenie czasu jazdy pociągu osobowego: $t=3{,}5$ i nie obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny: 2,5 godziny.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v+24=\frac{210}{t-1}$$

$$\begin{cases} 210 = v\cdot t \\ 210=(v+24)t-1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t-1$ w nawias. Zapis równania $v+24=\frac{210}{t-1}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v+24=\frac{210}{t-1} \qquad \begin{cases} v=\dfrac{210}{t} \\ v+24=\dfrac{210}{t-1} \end{cases} \qquad \frac{120}{t}+24=\frac{210}{t-}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{120}{t}+24=\frac{210}{t-}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 210 i pominął liczbę 1 w mianowniku ułamka.

Przykład 3.
Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $4t^2+4t-35=0$ zamiast równania $4t^2-4t-35=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realnym czasem jazdy pociągu pospiesznego, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.

Komentarz
Zadania tego typu występują od kilku lat w arkuszach egzaminu maturalnego, jednak 53% zdających otrzymało 0 punktów za rozwiązanie tego zadania. (14% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania).
Wśród tych, którzy podjęli się rozwiązania 18% zdających zapisywało tylko równanie $(t-1)\cdot(v+24)=210$ lub układ równań $\begin{cases} t\cdot v=210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases}$ i na tym kończyli.
Za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali **1** (za zapisanie tylko jednego równania) lub **2 punkty**.
Rzadziej pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali (bez obliczeń), że czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny. Za takie rozwiązanie, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali **1 punkt**.
Błędy w rozwiązaniu zadania pojawiały się na różnych etapach. Zdający, np.:

- błędnie zapisywali równanie opisujące zależności dla pociągu pośpiesznego i okazywało się, że jedzie on dłużej i wolniej niż pociąg osobowy, np.: przy oznaczeniach t – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, v – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę $(t+1)\cdot(v-24)=210$
- popełniali błędy przy przekształceniu układu do równania kwadratowego
- błędnie interpretowali treść zadania i porównywali wielkości różnych typów, np. zapisywali układ $\begin{cases} (t-1)=(v+24) \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases}$.

Poziom rozszerzony

Omawiając sposoby rozwiązania zadań otwartych, odwołujemy się do rozwiązań i schematów ich oceniania zawartych w *Kryteriach oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE:

Zadanie 1. ***(4 pkt)***
Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie zadania prowadzącego do rozwiązania równania kwadratowego (standard III).		
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,83 – **łatwe**	0,85	0,70
Przykładowy poprawny zapis rozwiązania		

Niech a oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to: $a+1$, $a+2$, $a+3$. Zapisujemy zatem równanie kwadratowe $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ które po przekształceniu przyjmuje postać $3a^2+5a+2=0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: $a_1=-1$, $a_2=-\frac{2}{3}$. Rozwiązanie $-\frac{2}{3}$ odrzucamy jako sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita). Zatem szukane liczby to: $-1,\ 0,\ 1,\ 2$.
Przydział punktów za takie rozwiązanie **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ……………………………………………………...........**1 pkt** Zapisanie kolejnych czterech liczb całkowitych, np.: $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$, gdzie a jest liczbą całkowitą. **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .... **2 pkt** Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ lub $3a^2+5a+2=0$ **Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ...**………………………………… **3 pkt** • Przekształcenie równania $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ do postaci równania kwadratowego z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste) albo • poprawne rozwiązanie równania kwadratowego $3a^2+5a+2=0$, nieodrzucenie rozwiązania $-\frac{2}{3}$ i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb. **Rozwiązanie pełne** .... **4 pkt** Zapisanie czwórki liczb całkowitych spełniających warunki zadania: $-1,\ 0,\ 1,\ 2$.
Komentarz Zadanie okazało się najłatwiejszym zadaniem w tym arkuszu. Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem kolejnych czterech liczb całkowitych np.: $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$. Trudności pojawiały się na etapie przekształcenia równania $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ do prostszej postaci. Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający stosowali wzory na ciąg arytmetyczny, ale nie zauważali, że różnica $r=1$ i dalej nie umieli rozwiązać danego problemu. Czasami popełnianym przez zdających błędem było podanie dwóch rozwiązań, nie odrzucenie rozwiązania niecałkowitego.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^4+x^2\geq 2x$.

Sprawdzana umiejętność Rozwiązanie nierówności wielomianowej (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu	**Wskaźnik łatwości zadania**

zdających	LO	T
0,67 – **umiarkowanie trudne**	0,72	0,38

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:

$$x^4 + x^2 - 2x = x\left(x^3 + x - 2\right) = x\left(x\left(x^2 - 1\right) + 2\left(x - 1\right)\right) =$$

$$= x\left(x\left(x-1\right)\left(x+1\right) + 2\left(x-1\right)\right) = x\left(x-1\right)\left(x\left(x+1\right)+2\right) = x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right).$$

Zauważamy, że trójmian $x^2 + x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, zatem rozwiązanie nierówności $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right) \geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right) \geq 0$, czyli sumą przedziałów $\left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie wielomianu $x^4 + x^2 - 2x$ w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest x lub $x - 1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego , np. $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right) \geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Zauważenie, że rozwiązanie nierówności $x^4 + x^2 - 2x \geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right) \geq 0$

albo

- narysowanie i uzupełnienie tabeli znaków lub sporządzenie szkicu wykresu wielomianu z uwzględnieniem jego miejsc zerowych.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności $x^4 + x^2 \geq 2x$: $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

Komentarz

W zadaniu tym zdający często popełniali błąd, dzieląc obie strony nierówności przez x, nie zapisując, że $x \neq 0$ oraz nie rozpatrywali pozostałych przypadków, co skutkowało otrzymaniem **0 punktów** za całe zadanie.

Większość zdających, którzy doprowadzili nierówność do postaci, np.: $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right) \geq 0$ w ogóle nie pisali o znaku trójmianu $x^2 + x + 2$ i od razu podawali rozwiązanie.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

Sprawdzana umiejętność

Rozwiązanie równania trygonometrycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	T
0,66 – **umiarkowanie trudne**	0,70	0,35

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, przekształcamy

równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x: $\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x+2=0$. Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$, którego rozwiązaniami są $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$. Zapisujemy rozwiązania tych równań: $x=2k\pi$ oraz $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Przydział punktów za takie rozwiązanie **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt** Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej argumentu x, np.: $\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x+2=0$ lub $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$. **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt** Rozwiązanie równania $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ z niewiadomą $\cos x$: $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$. **Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt** Rozwiązanie jednego z równań $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$. **Rozwiązanie pełne .... 4 pkt** Rozwiązanie równania: $x=2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Komentarz Zdający na ogół poprawnie przekształcili równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x: $\left(2\cos^2 x-1\right)-3\cos x+2=0$. Na tym etapie zatrzymało się 10% zdających. Na etapie rozwiązania równania z niewiadomą $\cos x$: $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$ zakończyło 19 %. Trudność sprawiało rozwiązanie równań : $\cos x=1$ lub $\cos x=\frac{1}{2}$ i zapisanie ich ogólnych rozwiązań. Często podawano rozwiązania tylko z przedziału $\left\langle -2\pi,2\pi\right\rangle$, – tak jak wymagano tego w podobnym zadaniu na egzaminie w 2011 roku. Tylko 42% zdających otrzymało komplet punktów za poprawne rozwiązanie równania .

Zadanie 4. ***(6 pkt)***

Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-\left(m+2\right)x+m+4=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$.

Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągniecie wniosków (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu	**Wskaźnik łatwości zadania**

zdających	**LO**	**T**
0,45 – **trudne**	0,49	0,22

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Korzystamy ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m + 4$.

Mamy teraz:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= \left(\left(m+2\right)^2 - 2\left(m+4\right)\right)^2 - 2\left(m+4\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$$

Stąd otrzymujemy równanie

$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$,

czyli $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$.

Zatem $\left(m^2 - 6\right)^2 = 64$, stąd : $m^2 - 6 = -8$ lub $m^2 - 6 = 8$,

czyli $m^2 = -2$ lub $m^2 = 14$.

Przypadek $m^2 = -2$ jest niemożliwy; zatem $m^2 = 14$, czyli $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Zauważamy, że jeśli $m^2 = 14$, to $\Delta = m^2 - 12 = 14 - 12 = 2 > 0$, a więc oba pierwiastki x_1 i x_2 są rzeczywiste.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$ Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

Zdający nie musi rozwiązywać nierówności $\Delta > 0$ o ile w dalszej części rozwiązania sprawdzi, że dla $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$ mamy $m^2 = 14$, więc $\Delta > 0$

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania z niewiadomą m i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2$.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....3 pkt

Zapisanie wyrażenia $x_1^4 + x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m*, np.

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

Rozwiązanie bezbłędne części b) ....4 pkt

Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

Komentarz

Celem zadania było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować i zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. W schemacie oceniania tego zadania opisano cztery metody rozwiązania różniące się sposobem doprowadzenia równania $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ do postaci równania ze zmienną *m*. Zazwyczaj zdający przekształcali to równanie, wykorzystując wzory Viète'a, ale pojawiały się także rozwiązania, w których zdający wyznaczali pierwiastki:

$$x_1=\frac{m+2-\sqrt{m^2-12}}{2},\ x_2=\frac{m+2+\sqrt{m^2-12}}{2},$$

a następnie sumę ich czwartych potęg $x_1^4+x_2^4=m^4+4m^3-6m^2-32m-16$ i zapisywali odpowiednie równanie. Przy tej metodzie mało osób osiągało poprawne równanie. Zdający popełniali liczne błędy przy potęgowaniu i redukcji wyrazów podobnych.
Tylko 15% zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 34% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.

Jednak najwięcej błędów maturzyści popełnili (w każdej metodzie) podczas doprowadzenia równania $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ do postaci równania z jedną niewiadomą *m*. Niektórzy zdający:

- nie potrafili zastosować wzorów skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $x_1^4+x_2^4$, np. $x_1^4+x_2^4=\left(x_1+x_2\right)^4-2x_1x_2$ lub $x_1^4+x_2^4=\left(x_1+x_2\right)^4$
- popełniali błędy podczas stosowania wzorów Viète'a, korzystając ze wzorów, zapisywali je błędnie: $x_1+x_2=\frac{-b}{2a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{2a}$, np. $x_1+x_2=-(m+2)$ i $x_1\cdot x_2=4$
- niepoprawnie rozwiązywali równanie $m^4-12m^2+36=64$, popełniali liczne błędy nieuwagi i błędy rachunkowe

Mimo iż ten rodzaj zadań pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, niektórzy zdający nie pamiętali o konieczności rozważenia warunku $\Delta>0$, kiedy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania. Wielu zdających nie potrafiło też rozwiązać warunku $\Delta>0$, czyli bezbłędnie rozwiązać nierówności kwadratowej $m^2-12>0$.

Zadanie 5. ***(6 pkt)***
Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Sprawdzane umiejętności
Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,50 – **umiarkowanie trudne**	0,53	0,36

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Oznaczmy przez *a*, *b*, *c* kolejne liczby tworzące, w podanej kolejności, ciąg geometryczny.
Przez *a* oraz *q* oznaczamy odpowiednio pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu geometrycznego.
Wówczas $b=aq$ oraz $c=aq^2$. Z treści zadania wiemy, że ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c$ jest arytmetyczny, co oznacza, że jest spełniona równość $2\left(b+8\right)=a+c$, czyli $2\left(aq+8\right)=a+aq^2$.
Ponadto, ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c+64$ jest geometryczny, więc $\left(b+8\right)^2=a\cdot\left(c+64\right)$, a stąd

$\left(aq+8\right)^2 = a\cdot\left(aq^2+64\right)$.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2\left(aq+8\right) = a+aq^2 \\ \left(aq+8\right)^2 = a\cdot\left(aq^2+64\right) \end{cases}$$

Przekształcamy ten układ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $q^2+2q-15=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $q_1=-5,\ q_2=3$.

Jeżeli $q=-5$, to $a=\frac{4}{9}$, $b=-\frac{20}{9}$ oraz $c=-\frac{20}{9}\cdot\left(-5\right)=\frac{100}{9}$.

Jeżeli zaś $q=3$, to $a=4$, $b=12$ oraz $c=12\cdot 3=36$.

Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $\left(4,\ 12,\ 36\right)$ oraz $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{20}{9},\ \frac{100}{9}\right)$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie, że liczby $a,\ aq,\ aq^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz liczby $a,\ aq+8,\ aq^2$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $a,\ aq+8,\ aq^2+64$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań, np.

$$\begin{cases} a+aq^2 = 2\left(aq+8\right) \\ \left(aq+8\right)^2 = a\left(aq^2+64\right) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą np.: $q^2+2q-15=0$ lub $9a^2-40a+16=0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...5 pkt

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $q^2+2q-15=0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne.

lub

- Zdający przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $\left(4,\ 12,\ 36\right)$ oraz $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{20}{9},\ \frac{100}{9}\right)$.

Komentarz

Kolejny raz okazało się, że zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności obu ciągów). Układ poprawnie zapisało ok. 36% zdających. Trudności pojawiły się jednak na etapie rozwiązywania układu równań. Najczęściej popełniano błędy przy redukcji wyrazów podobnych, błędy rachunkowe i błędy nieuwagi. Wielu zdających miało też problemy z właściwą interpretacją otrzymanych wyników i odrzucało rozwiązanie $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$ jako niespełniające warunków zadania.

6 punktów za pełne rozwiązanie zadania otrzymało 23% zdających.

Zadanie 6. ***(6 pkt)***

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m \in \langle -1, 7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q = \left(\frac{55}{2}, 0\right)$.

Sprawdzane umiejętności

Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,37 – **trudne**	0,40	0,18

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Wyznaczamy odległość punktów P i Q: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$.

Wyznaczamy wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$:

$$f(m) = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 = \frac{5}{4}\left(m^2 - 20m + 500\right) \text{ dla } m \in \langle -1, 7\rangle.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f:

$$m_w = \left(\frac{5}{4}\cdot 20\right) : \left(2\cdot\frac{5}{4}\right) = 25 : \frac{5}{2} = 25\cdot\frac{2}{5} = 10$$

Ponieważ $10 \notin \langle -1, 7\rangle$, wiec w tym przedziale funkcja f jest monotoniczna.

Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji f dla $m \in \langle -1, 7\rangle$ są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$f(-1) = \frac{5}{4}(1 + 20 + 500) = 651,25$, $\quad f(7) = \frac{5}{4}(49 - 140 + 500) = 511,25$.

Stąd najmniejsza i największa wartość $|PQ|^2$ to odpowiednio 511,25 oraz 651,25.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie odległości między punktami P i Q: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$ lub

$|PQ|^2 = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie wzoru funkcji f w postaci, np. $f(m) = \frac{5}{4}\left(m^2 - 20m + 500\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

- Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f i stwierdzenie, że współrzędna ta nie należy do przedziału $\langle -1,7\rangle$: $m_w = 10$ i $10 \notin \langle -1,7\rangle$ i z rozwiązania wynika, że $f(10)$ nie jest żadną z poszukiwanych wartości

albo

- obliczenie $f(-1)$ i $f(7)$, zapisanie bez uzasadnienia, że $f(-1)$ jest wartością największą, $f(7)$ jest wartością najmniejszą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..5 pkt

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Podanie najmniejszej i największej wartość $|PQ|^2$ odpowiednio 511,25 oraz 651,25 z uzasadnieniem, np. powołanie się na monotoniczność lub stwierdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do podanego przedziału.

Komentarz

Celem zadania było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować i zbadać, kiedy funkcja przyjmuje najmniejszą i największą wartość W schemacie oceniania tego zadania opisano dwie metody rozwiązania zadania, algebraiczną i geometryczną.
Przy zastosowaniu metody algebraicznej błędy występowały już na etapie wyznaczania odległości punktów P i Q:
Pojawiały się też inne błędy. Zdający:

- zapominali o wyznaczeniu odciętej wierzchołka lub po jej obliczeniu nie sprawdzali czy należy do dziedziny funkcji
- nie potrafili poprawnie przekształcić wyrażenia algebraicznego i zapisywali wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$ np.

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}\right)\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(30 - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$$

lub

$$|PQ|^2 = \left(\frac{55}{2} - \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}\right)\right)^2 - m^2$$

- popełniali błędy rachunkowe.

Zdający, którzy poprawnie zapisali wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$ jako funkcję zmiennej m, z reguły nie mieli kłopotów z rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego.

Zadanie 7. ***(3 pkt)***

Udowodnij, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Sprawdzana umiejętność

Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	**T**
0,29 – **trudne**	0,32	0,12

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Przekształcamy nierówność w sposób równoważny

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2\ge 0,$$
$$\left(a^3-a^2b\right)+\left(b^3-ab^2\right)\ge 0,$$
$$a^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-a\right)\ge 0,$$
$$\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0,$$
$$\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia $a+b\ge 0$ oraz $\left(a-b\right)^2\ge 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b, co kończy dowód.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej $\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0$ lub $\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\ge 0$, lub $\left(a-b\right)\left(a-b\right)\left(a+b\right)\ge 0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Przeprowadzenie pełnego dowodu.

Komentarz

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne. Jednak tylko 2% zdających nie podjęło próby rozwiązania tego problemu (w 2011r. prawie 7% maturzystów), co potwierdza, że zadania typu *Wykaż…* budzą coraz mniejsze obawy wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym.

Niestety 68% zdających nie miało dobrego pomysłu na rozwiązanie zadania i otrzymało **0 punktów.**

Zdający, którzy doprowadzili nierówność do postaci, np.:$\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)\le ab\left(a+b\right)$ często popełniali błąd, dzieląc obie strony nierówności przez $a+b$, bez założenia, że $a+b\ne 0$ co skutkowało otrzymaniem **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 8. ***(4 pkt)***

Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	**T**
0,32 – **trudne**	0,33	0,23

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Rozkładamy liczbę 12 na czynniki pierwsze $12=3\cdot 2\cdot 2$.
Mamy więc trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12:

1. Wśród cyfr tej liczby są „3”, „4” i sześć „1” ($12=3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest:
   $8\cdot 7=56$ - wybieramy miejsce dla „3” na 8 sposobów i z pozostałych dla „4” na 7

sposobów.

2. Wśród cyfr tej liczby są „2”, „6” i sześć „1” ($12 = 2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot 7 = 56$ - wybieramy miejsce dla „2” na 8 sposobów i z pozostałych dla „6” na 7 sposobów.

3. Wśród cyfr tej liczby są dwie „2”, jedna „3” i pięć „1” ($12 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot\binom{7}{2} = 168$ - wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla „3” a następnie dwa miejsca z pozostałych siedmiu dla „2”.

Zatem liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12 jest $56 + 56 + 168 = 280$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie, co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$12 = 3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$
$12 = 2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$
$12 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie wszystkich trzech, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości) :

$12 = 3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$
$12 = 2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$
$12 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w co najmniej dwóch z trzech możliwości.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12:
$56 + 56 + 168 = 280$.

Komentarz

Zadanie okazało się dla zdających trudne i było jednym z trzech najtrudniejszych zadań w tym zestawie egzaminacyjnym. Miało największą frakcję opuszczeń (ok.9%) i około 46% zdających otrzymało 0 punktów.

Zadanie rzadko było rozwiązane poprawnie. Aby zdobyć 1 punkt wystarczyło zapisać, co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości – ten warunek spełniło ok. 12% zdających. Po wypisaniu wszystkich trzech możliwości ok.22% zdających nie miało pomysłu na dalsze rozwiązanie. Wśród rozwiązań można było zauważyć zapisy świadczące o braku umiejętności zapisania liczb w zapisie dziesiętnym, np. $12 = 12\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$.

Zadanie 9. ***(5 pkt)***

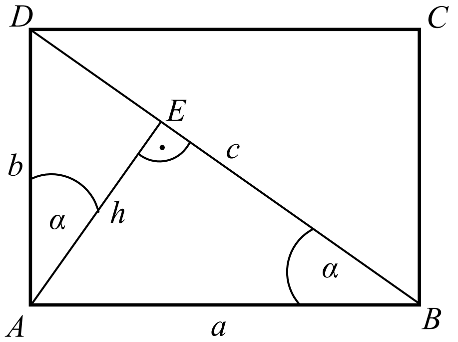
Dany jest prostokąt *ABCD*, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek *AE* jest wysokością trójkąta *DAB* opuszczoną na jego bok *BD*. Wyraź pole trójkąta *AED* za pomocą *a* i *b*.

Sprawdzane umiejętności

Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,50 – **umiarkowanie trudne**	0,53	0,29

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta *DEA* (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *D*), więc $\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|}=\frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Stąd $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pole trójkąta *AED* jest równe $P_{ADE}=\frac{1}{2}h\cdot|DE|=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

- zauważenie, że trójkąty *AED* (lub *AEB*) i *BAD* są podobne i zapisanie odpowiedniej proporcji np.: $\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{|AB|}{|BD|}$ lub $\frac{|DE|}{|AD|}=\frac{|AD|}{|BD|}$

albo

- zapisanie pola trójkąta *AED*: $P=\frac{|AE|\cdot|DE|}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie długości odcinka *DE*: $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub *AE*: $|AE|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie długości obu odcinków *DE*: $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i *AE*: $|AE|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...4 pkt

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie pola trójkąta *AED*: $P_{AED}=\frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Komentarz

Zadanie z planimetrii było nietypowe. Skutkowało to jego niska łatwością. Zadania, w którym nie są podane wartości liczbowe, w dalszym ciągu sprawiają kłopot zdającym. Około 26% zdających nie miało pomysłu na rozwiązanie zadania, nie zauważyli oni podobieństwa odpowiednich trójkątów. Za pełne rozwiązanie (5 punktów) otrzymało tylko 36% zdających.

Zadanie 10. ***(5 pkt)***
Podstawą ostrosłupa *ABCS* jest trójkąt równoramienny *ABC*. Krawędź *AS* jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzana umiejętność
Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości zadania	
	LO	**T**
0,74 – **łatwe**	0,76	0,65

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BAS* obliczamy długość boku *AB*:
$|AB| = \sqrt{118^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 22$.
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CAS* obliczamy długość boku *AC*:
$|AC| = \sqrt{131^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 61$.
Stąd wynika, że $|BC| = 61$, ponieważ nie istnieje trójkąt o długościach boków 22, 22, 61 (nierówność trójkąta).
Trójkąt *ABC* jest równoramienny, wówczas wysokość *h* opuszczona na bok *AB* jest równa:
$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60$.
Obliczamy pole *P* trójkąta *AB*C: $P = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 = 660$.
Obliczamy objętość *V* ostrosłupa *ABCS*: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot 660 \cdot 8\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Obliczenie długości boku *AB*: $|AB| = 22$ albo obliczenie długości boku *AC*: $|AC| = 61$
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....3 pkt
Obliczenie długości boku *AB*: $|AB| = 22$ i długości boku *AC*: $|AC| = 61$ oraz zauważenie, że długość boku *BC* jest równa 61.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania...4 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P = 660$.
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Rozwiązanie pełne ....5 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 1760\sqrt{210}$.

Komentarz
Przedostatnie, dziesiąte zadanie w arkuszu, badało umiejętność zbudowania i zrealizowania strategii rozwiązania dość typowego problemu ze stereometrii. Zadanie okazało się łatwe dla ogółu zdających – skuteczność zdających zmierzona wskaźnikiem łatwości jest równa 0,73.

Było to zadanie najrzadziej opuszczane przez zdających – 0,5%.
Zdający w większości poprawnie rozpoznali zależności pomiędzy informacjami podanymi w treści zadania, prawidłowo zaplanowali kolejność obliczeń i dobrze dobrali potrzebne definicje oraz twierdzenia.
W rozwiązaniach zdający najczęściej popełniali błędy rachunkowe, a ponieważ rozwiązanie zadania składało się z kilku etapów, więc błędy były popełniane czasem kilkakrotnie. Błędy te były popełniane już przy obliczaniu długości boków trójkątów, z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa. Martwią błędy merytoryczne. Przy wyznaczaniu wysokości podstawy, czasami błędnie rozpatrywano trójkąt (22,22,61), który nie istnieje.

Można było także zaobserwować pewną beztroskę przy stosowaniu rachunków przybliżonych i zamienne stosowanie znaków „$=$” oraz „$\approx$”.
Trzeba wreszcie wspomnieć o grupie zdających, którzy nie poradzili sobie z poprawną interpretacją podanego w treści zadania i rysowali ostrosłup z inną wysokością.

Zadanie 11. ***(3 pkt)***

Zdarzenia losowe *A, B* są zawarte w Ω oraz $P\left(A\cap B'\right)=0,7$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).
Wykaż, że $P\left(A'\cap B\right)\le 0,3$.

Sprawdzana umiejętność
Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzeń (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	**Wskaźnik łatwości zadania**	
	LO	**T**
0,25 – **trudne**	0,27	0,11

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Zdarzenia $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$ są rozłączne.
Stąd i z faktu, że $P\left(\left(A\cap B'\right)\cup\left(A'\cap B\right)\right)\le 1$ wynika, że
$1\ge P\left(\left(A\cap B'\right)\cup\left(A'\cap B\right)\right)=P\left(A\cap B'\right)+P\left(A'\cap B\right)$, czyli $P\left(A'\cap B\right)\le 0,3$.

Przydział punktów za takie rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp...1 pkt
Zdający zauważy, że zdarzenia $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$ są rozłączne.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania..2 pkt
Zdający zapisze, że $1\ge P\left(\left(A\cap B'\right)\cup\left(A'\cap B\right)\right)=P\left(A\cap B'\right)+P\left(A'\cap B\right)$.
Rozwiązanie pełne ....3 pkt
Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Komentarz
Zadanie okazało się dla zdających trudne i było najtrudniejszym zadaniem w tym zestawie egzaminacyjnym, około 70% zdających otrzymało 0 punktów. Poza tym ok.7% zdających nie podjęło próby jego rozwiązania.
W większości prób rozwiązań tego zadania zdający nie zapisywali bezpośrednio faktu, że zdarzenia $A\cap B'$ oraz $A'\cap B$ są rozłączne. Dalsze etapy rozwiązań prowadziły do błędnych lub nieuzasadnionych zapisów. Dostrzeżenie faktu, że

$$1\ge P\left(\left(A\cap B'\right)\cup\left(A'\cap B\right)\right)=P\left(A\cap B'\right)+P\left(A'\cap B\right)$$

i wyciągnięcie wniosku dotyczącego prawdopodobieństwa $P\left(A'\cap B\right)\le 0,3$ przekraczało możliwości zdecydowanej większości zdających, o czym świadczy współczynnik łatwości zadania.
Najczęściej powtarzające się błędy:

Najczęściej zdający zapisywali $P(A \cap B') = P(A - B)$ lub $P(A \cap B') = P(A - (A \cap B))$.
Następnie, wykorzystując własność dotyczącą prawdopodobieństwa sumy zdarzeń A i B': $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$.
Takie same zapisy stosowano do zdarzeń A' i B: $P(A' \cap B) = P(B - A)$ lub $P(A' \cap B) = P(B - (A \cap B))$ oraz $P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$ i nie mieli pomysłu na dalsze rozwiązanie problemu. Następnie zapisywali, że $P(A \cap B') \le 0,3$.

5 Podsumowanie i wnioski

Wyniki egzaminu maturalnego świadczą o tym, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności lub zadania podobne do tych, które występowały na poprzednich egzaminach, włącznie z egzaminem próbnym. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych (standardy: IV – *Użycie i tworzenie strategii* oraz V – *Rozumowanie i argumentacja*), większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania.

Duży procent opuszczeń wystąpił w zadaniach na dowodzenie.

Poziom podstawowy:

- zadanie 27. – 22% (np. rok temu podobne zadanie 25. –25%)
- zadanie 30. – 19%.

Poziom rozszerzony:

- zadanie 11. – 7% (dowód z rachunku prawdopodobieństwa).

Poza tym na poziomie rozszerzonym najwięcej opuszczeni było w zadaniach:

- 6. – 8% (zadanie na optymalizację)
- 8. – 9% (obliczenia kombinatoryczne.

W pracy z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń i błędy rachunkowe.

Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki poprzedzone było szeroką akcją informacyjną skierowaną do uczniów i nauczycieli. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym,* a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE po próbnych egzaminach maturalnych. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych.

W pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2012 warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych (w dalszym ciągu dla większości zdających jedyną strategią jest ich otwieranie),
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się na algorytmach),
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,

- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.