Spis treści

1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki

W roku szkolnym 2010/2011 w całym kraju po raz kolejny został przeprowadzony egzamin maturalny dla absolwentów liceów ogólnokształcących (LO), liceów profilowanych (LP), techników (T), uzupełniających liceów ogólnokształcących (LU) i techników uzupełniających (TU).

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem zewnętrznym i ma formę pisemną. Egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot obowiązkowy był zdawany na poziomie podstawowym lub jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Egzamin na poziomie podstawowym trwał 170 minut, a na poziomie rozszerzonymi 180 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych zawartych w jednym arkuszu egzaminacyjnym.

Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania w każdym arkuszu wynosi 50.

W trakcie egzaminu zdający mógł korzystać z zestawu wybranych wzorów matematycznych przygotowanego przez CKE i kalkulatora z podstawowymi działaniami.
Wyniki egzaminu zamieszczone na świadectwie dojrzałości wyrażone są w skali procentowej.

2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2010/2011

Zgodnie z koncepcją i strukturą egzaminu maturalnego z matematyki zdający egzamin w tym roku, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, mieli do rozwiązania zadania z jednego arkusza egzaminacyjnego.
Arkusze zostały tak skonstruowane, aby zbadać stopień opanowania umiejętności określonych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Poziom trudności poszczególnych zadań był zróżnicowany i dostosowany do możliwości absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. Tematyka zadań dotyczyła większości treści zawartych w podstawie programowej matematyki. Zadania egzaminacyjne zawarte w arkuszach pozwalały sprawdzić znajomość i rozumienie podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz stosowanie ich do rozwiązywania problemów matematycznych. Sprawdzały też umiejętność korzystania i przetwarzania podanych informacji oraz umiejętność zastosowania tej wiedzy w praktyce z zakresu wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego. Zadania egzaminacyjne w arkuszu rozszerzonym w większym stopniu niż w arkuszu podstawowym sprawdzały umiejętność rozwiązywania problemów i podawania do nich opisu matematycznego w oparciu o treści obejmujące zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, umiejętność argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

ARKUSZ PODSTAWOWY

Arkusz podstawowy składał się z 33 zadań, w tym 23 zamkniętych (zdający wybierał odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać). Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było 7 zadań dwupunktowych, 2 zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Tematyka zadań egzaminacyjnych obejmowała treści podstawy programowej. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

ARKUSZ ROZSZERZONY

Arkusz dla poziomu rozszerzonego składał się z 12 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich były 2 zadania sześciopunktowe, 8 zadań czteropunktowych i 2 zadania trzypunktowe.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.

3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki

W Tabeli 1. zamieszczono kartotekę arkusza podstawowego, w Tabeli 2. – kartotekę arkusza rozszerzonego. Kartoteki te zawierają informację o sprawdzanych czynnościach, przyporządkowany im numer standardu, numer treści ze standardu I, których znajomością powinien wykazać się zdający, oraz numery zadań wraz z maksymalną liczbą punktów, które można było uzyskać za ich rozwiązanie.

Tabela 1. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom podstawowy

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Typ zadania	Punktacja
1	wykorzystuje pojęcia wartości bezwzględnej	INF	ZZ	1 pkt
2	wykonuje obliczenia procentowe	REP	ZZ	1 pkt
3	rozkłada wielomian na czynniki z zastosowaniem wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias	INF	ZZ	1 pkt
4	rozwiązuje układ równań liniowych	MOD	ZZ	1 pkt
5	rozwiązuje proste równanie liniowe i sprawdza czy rozwiązanie należy do danego przedziału	REP	ZZ	1 pkt
6	sprawdza, które z podanych liczb spełniają nierówność i wybiera z nich najmniejszą	REP	ZZ	1 pkt

7	interpretuje rozwiązania nierówności kwadratowej i liniowej na osi liczbowej	REP	ZZ	1 pkt
8	wykorzystuje definicję logarytmu, do wyznaczenia dziedziny	REP	ZZ	1 pkt
9	określa funkcję za pomocą wzoru i interpretuje wykresy funkcji	REP	ZZ	1 pkt
10	oblicza miejsce zerowe funkcji liniowej	REP	ZZ	1 pkt
11	stosuje wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego	REP	ZZ	1 pkt
12	stosuje wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego	STR	ZZ	1 pkt
13	oblicza wartość funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, znając wartość innej funkcji trygonometrycznej tego kąta	REP	ZZ	1 pkt
14	stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	REP	ZZ	1 pkt
15	znajduje związki miarowe w przestrzeni	STR	ZZ	1 pkt
16	korzysta ze związków między kątem środkowym i kątem wpisanym	REP	ZZ	1 pkt
17	znajduje związki miarowe w figurach płaskich	STR	ZZ	1 pkt
18	bada równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych	REP	ZZ	1 pkt
19	posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ i sprawdza, czy dana prosta jest styczną	REP	ZZ	1 pkt
20	wyznacza związki miarowe w sześcianie	REP	ZZ	1 pkt
21	wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych	REP	ZZ	1 pkt
22	stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia	MOD	ZZ	1 pkt
23	oblicza średnią arytmetyczną	REP	ZZ	1 pkt
24	rozwiązuje nierówność kwadratową	REP	KO	2 pkt
25	uzasadnia zależność arytmetyczną przez zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	ROZ	KO	2 pkt
26	odczytuje z wykresu funkcji: zbiór wartości oraz maksymalny przedział, w którym funkcja maleje	INF	KO	2 pkt
27	stosuje wzory na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystuje własności trzech kolejnych wyrazów tego ciągu	MOD	KO	2 pkt
28	stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	STR	KO	2 pkt
29	uzasadnia, że wskazany kąt jest prosty	ROZ	KO	2 pkt
30	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia	STR	KO	2 pkt

31	wyznacza współrzędne punktu styczności prostej z okręgiem	STR	RO	4 pkt
32	rozwiązuje zadanie umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równania kwadratowego z jedną niewiadomą	MOD	RO	5 pkt
33	wyznacza związki miarowe w sześcianie	STR	RO	4 pkt

Tabela 2. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom rozszerzony

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Typ zadania	Punktacja
1	wykorzystuje cechy podzielności liczb całkowitych	STR	RO	4 pkt
2	przekształca równoważnie wyrażenia wymierne	ROZ	RO	4 pkt
3	rozwiązuje równanie kwadratowe z parametrem stosując wzory Viète'a, przeprowadza dyskusję i wyciąga wnioski	STR	RO	6 pkt
4	rozwiązuje równanie trygonometryczne	STR	RO	4 pkt
5	stosuje własności ciągu geometrycznego, wzory na *n*- ty wyraz tego ciągu i na sumę *n* wyrazów ciągu arytmetycznego	STR	RO	4 pkt
6	wyznacza związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii	STR	RO	4 pkt
7	rozwiązuj zadanie dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu	STR	RO	4 pkt
8	znajduje związki miarowe w graniastosłupie i wyznacza największą wartość funkcji	MOD	RO	4 pkt
9	wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych	STR	RO	4 pkt
10	znajduje związki miarowe w figurach płaskich	ROZ	RO	3 pkt
11	znajduje związki miarowe w ostrosłupie	STR	RO	6 pkt
12	wykorzystuje własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń	STR	RO	3 pkt

4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki

W województwie pomorskim do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło po raz pierwszy 19949 osób.

Wynik co najmniej 30% punktów za rozwiązanie zadań na poziomie podstawowym uzyskało około 77%.

W Tabeli 3. przedstawiono procent abiturientów z uwzględnieniem typu szkoły, którzy zdali egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym, tj. uzyskali co najmniej 30% punktów i zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy w latach 2005 - 2011.

Tabela 3. Porównanie zdawalności w sesjach 2005 - 2011

		woj. pomorskie					
		LO	LP	T	LU	TU	Razem
% osób, które zdały egzamin	2005	93	56	-	-	-	84
	2006	97	84	88	-	-	93
	2007	88	62	63	-	-	76
	2008	92	63	81	-	-	88
	2009	93	72	80	-	-	89
	2010	93	70	83	47	44	87
	2011	85	48	70	22	18	77

Pojęcie ***zdawalność*** do roku 2006 dotyczyło osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego, a latach 2007-2009 uzyskały 30% dla wybranego poziomu. Od roku 2010 dotyczy osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do uzyskania z arkusza podstawowego. Przy analizie tych wyników należy uwzględnić rozdzielenie poziomów.

Zdawalność w liceach i technikach uzupełniających do 2009 roku miała małą wagę statystyczną ze względu na niewielką liczbę zdających.

4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej

Skala ta pozwala porównać wyniki egzaminu z kilku kolejnych lat. Poza tym uczeń może zinterpretować uzyskany wynik na tle całej populacji zdających i ocenić swoje realne szanse na kontynuowanie nauki.

Tabela 4. Znormalizowana skala dziewięciostopniowa staninowa

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym na skali staninowej (egzamin zdawało 371 828 osób w kraju)

Stanin (klasa wyniku) Nr	% ogólnych wyników	Nazwa stanina	Wynik (w %)	Komentarz
1	4%	**najniższy**	**0% - 12%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	**bardzo niski**	**14% - 18%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	**niski**	**20% - 26%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	**poniżej średniej**	**28% - 36%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	**średni**	**38% - 50%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	**powyżej średniej**	**52% - 68%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	**wysoki**	**70% - 84%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	**bardzo wysoki**	**86% - 94%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	**najwyższy**	**96% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym na skali staninowej (egzamin zdawało 58312 osób w kraju)

Stanin (klasa wyniku) Nr	% ogólnych wyników	Nazwa stanina	Wynik (w %)	Komentarz
1	4%	najniższy	**0% - 2 %**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	bardzo niski	**4% - 8%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	**10% - 18%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	**20% - 34%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	**36% - 52%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	**54% - 66%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	**68% - 80%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	**82% - 90%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	**92% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak wskaźniki łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza z poziomu podstawowego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą absolwentów z województwa pomorskiego.

4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego

Tabela 5. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki jako obowiązkowy na poziomie podstawowym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	LU	T	TU	Razem
Liczba zdających	12 065	243	846	6 645	150	19 949
Liczba zdających, którzy uzyskali co najmniej 30% punktów	10 283	116	190	4 678	27	15 294
Wynik minimalny w punktach	1,0	4,0	1,0	0,0	3,0	0,0
Wynik maksymalny w punktach	50,0	46,0	42,0	50,0	31,0	50,0
Wynik średni w punktach	28,53	15,35	11,46	20,03	11,41	24,68
Wynik średni w %	57,05	30,71	22,91	40,06	22,81	49,37
Modalna w punktach	20,00	11,00	9,00	15,00	11,00	15,00
Mediana w punktach	28,00	14,00	10,00	18,00	11,00	22,00
Odchylenie standardowe w pkt.	12,4	6,5	5,7	9,0	4,8	12,2
Odchylenie standardowe w %	24,84	13,10	11,47	17,96	9,63	24,34
Zdawalność w %	85,23	47,74	22,46	70,40	18,00	76,67

Analizie statystycznej poddano wyniki 19949 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2011 roku (dla porównania w 2010r. 20809 osób). Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 24,68 punktów, co stanowi 49,37% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu podstawowego. Rozstęp wyników wynosi 50 i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) - 12,2 - oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 12 – 37 punktów, dla porównania w roku 2010 wartość miary rozrzutu wynosiła (odchylenie standardowe) – 11,69, co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 18-41 punktów.

Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących i techników są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół. W arkuszu rozszerzonym różnice te są dużo większe.

4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści

Tabela 6. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu podstawowego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1	Liczby rzeczywiste	1, 2	2	0,77	0,31
2	Wyrażenia algebraiczne	3,25	3	0,39	0,23
3	Równania i nierówności	4, 5, 6, 7, 32	9	0,47	0,33
4	Funkcje	8, 9, 10, 24, 26	7	0,61	0,29
5	Ciągi liczbowe	11, 12, 27	4	0,61	0,34

6	Trygonometria	13, 14, 28	4	0,55	0,34
7	Planimetria	16, 17, 29	4	0,32	0,24
8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	18, 19, 31	6	0,31	0,33
9	Stereometria	15, 20, 21, 33	7	0,52	0,29
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	22, 23, 30	4	0,53	0,35

Powyższe wyniki wskazują, że uczniowie zdający egzamin na poziomie podstawowym rozwiązują zadania z poszczególnych działów na poziomie około 50 procent i więcej. Niższe wskaźniki łatwości z trzech działów takich jak: „Wyrażenia algebraiczne”, „Planimetria” i „Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej”, są spowodowane tym, że występowały w nich zadania typu „*Uzasadnij…*” . Najłatwiejsze są dla nich zadania z liczb rzeczywistych i funkcji. Wynika to z faktu, że zadania tego typu występowały na poprzednich egzaminach maturalnych, włącznie z egzaminem próbnym.

4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 7. Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu podstawowego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	0,63	0,28
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	0,66	0,23
3. Modelowanie matematyczne.	0,45	0,37
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,39	0,29
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,10	0,25

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najłatwiejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie II, w którym zdający wykorzystuje i interpretuje reprezentacje. W dalszym ciągu najtrudniejszy jest standard V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.
Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia tabela 8.

Tabela 8. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1, 3	26	4	8%
2.Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23	24	18	36%
3. Modelowanie matematyczne.	4, 22	27, 32	9	18%
4. Użycie i tworzenie strategii.	12, 15, 17	28, 30, 31, 33	15	30%
5. Rozumowanie i argumentacja.		25, 29	4	8%

4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny podstawowy był dla zdających trudny. Bardzo trudne okazały się zadania na dowodzenie: 25 i 29.

Stopień wykonania zadań z arkusza podstawowego przedstawiono w Tabelach 9 i 10.

Tabela 9. Łatwość zadań arkusza podstawowego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,64	0,90	0,92	0,49	0,57	0,58	0,58	0,58	0,70	0,66	0,61

Numery zadań	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Łatwość zadań	0,81	0,82	0,66	0,86	0,42	0,70	0,63	0,43	0,72	0,91	0,55

Numery zadań	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Łatwość zadań	0,70	0,68	0,13	0,49	0,50	0,35	0,07	0,42	0,21	0,39	0,28

Rysunek 1. Łatwość zadań arkusza podstawowego

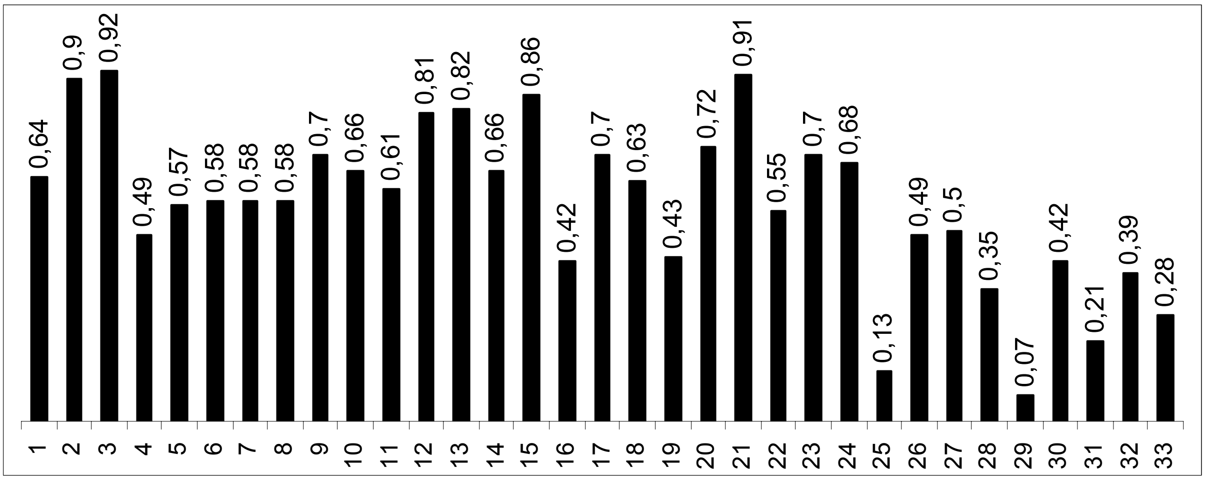


Tabela 10. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza podstawowego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	25, 29	2
Trudne	0,20-0,49	4, 16, 19, 26, 28, 30, 31, 32, 33	9
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 18, 22,24, 27	12
Łatwe	0,70-0,89	9, 12, 13, 15, 17, 20, 23	7
Bardzo łatwe	0,90-1,00	2, 3, 21	3

W arkuszu dla poziomu podstawowego znalazły się zadania od bardzo trudnych po bardzo łatwe, co wskazuje na duże zróżnicowanie poziomu zadań. Spośród zadań najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte: 2 – obliczenia procentowe, 3 – wyrażenie algebraiczne, 21 – obliczenie objętości stożka o danej wysokości i danej średnicy.

4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak np. wskaźnik łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza rozszerzonego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą całej grupy abiturientów, którzy wybrali matematykę na poziomie rozszerzonym.

4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego

W Tabeli 11. przedstawiono wartości wybranych wskaźników statystycznych (wynik maksymalny, minimalny i średni wyrażone w punktach i procentach) uzyskane przez zdających za rozwiązanie zadań z arkusza rozszerzonego.

Tabela11. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających na poziomie rozszerzonym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	LU	T	TU	Razem
Liczba zdających	2814	3	0	323	0	3140
Wynik minimalny w punktach	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Wynik maksymalny w punktach	50,0	27,0	0,0	48,0	0,0	50,0
Wynik średni w punktach	23,93	11,00	0,00	10,57	0,00	22,54
Wynik średni w %	47,85	22,00	0,00	21,15	0,00	45,08
Mediana	24,00	3,00	0,00	8,00	0,00	22,00
Modalna w punktach	26,00	3,00	0,00	3,00	0,00	3,00
Odchylenie standardowe w pkt	12,7	11,3	0,0	8,9	0,0	13,0
Odchylenie standardowe w %	25,47	22,63	0,00	17,71	0,00	26,09

Analizie statystycznej poddano wyniki 3140 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2011 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 22,54 punktów, co stanowi 45% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu rozszerzonego. Rozstęp wyników wynosi 50 punktów i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) – 13,00 – oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 10 - 36 punktów. Dla porównania w roku 2010 wartość miary rozrzutu wynosiła 12,8 – co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 11-37 punktów.

4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych

Tabela 12. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu rozszerzonego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1.	Liczby rzeczywiste	1	4	0,28	0,38
2.	Wyrażenia algebraiczne	2	4	0,68	0,39
3.	Równania i nierówności	3	6	0,50	0,42
4.	Funkcje	8	4	0,55	0,42
5.	Ciągi liczbowe	5	4	0,45	0,46
6.	Trygonometria	4	4	0,42	0,42
7.	Planimetria	6 (4pkt) 10 (3pkt)	7	0,37	0,31
8.	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	7	4	0,39	0,43
9.	Stereometria	11	6	0,61	0,42
10.	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	9 (4pkt) 12 (3pkt)	7	0,31	0,24

Powyższe wyniki wskazują, że dla zdających najtrudniejszymi działami matematyki są: „Elementy statystyki opisowej, teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka” (0,33) i „ Liczby rzeczywiste” – dowód algebraiczny (0,31).

4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 13 Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu rozszerzonego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
3. Modelowanie matematyczne.	0,55	0,42
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,44	0,27
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,45	0,30

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najtrudniejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie IV dla poziomu rozszerzonego (Użycie i tworzenie strategii.).
Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia Tabela 14.

Tabela 14. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
3. Modelowanie matematyczne.	8	4	8%
4. Użycie i tworzenie strategii.	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12	39	78%
5. Rozumowanie i argumentacja.	2, 10	7	14%

4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny rozszerzony był dla zdających trudny.
Najtrudniejsze okazały się zadania:

- 10. – obliczenia z kombinatoryki,
- 9. – przeprowadzenie dowodu z planimetrii,
- 1. – wykorzystanie cech podzielności liczb całkowitych przy uzasadnieniu.

Najłatwiejsze okazały się zadania:

- 2. – przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego,
- 11. – znalezienie związków miarowych w ostrosłupie .

Stopień wykonania zadań z arkusza rozszerzonego przedstawiono w Tabelach 15. i 16.

Tabela15. Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Łatwość zadań	0,28	0,68	0,50	0,42	0,45	0,54	0,39	0,55	0,19	0,15	0,61	0,47

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

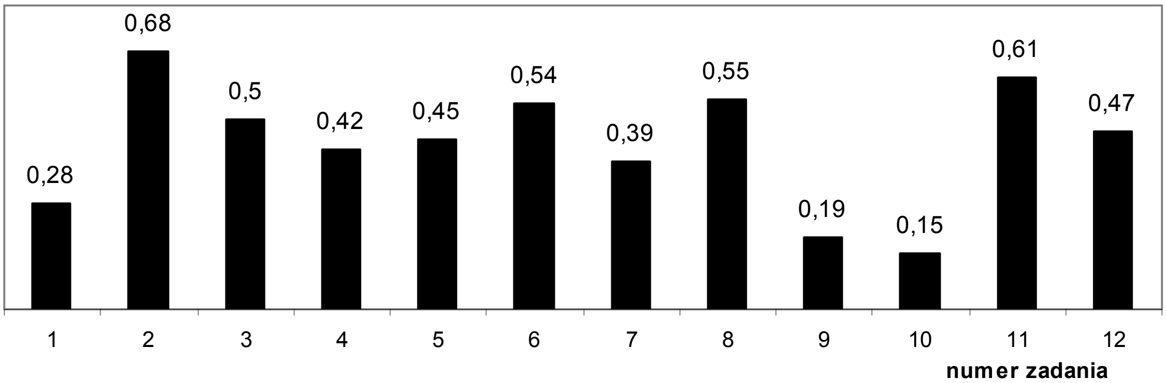


Tabela 16. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza rozszerzonego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	9, 10	2
Trudne	0,20-0,49	1, 4, 5, 7, 12	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	2, 3, 6, 8, 11	5
Łatwe	0,70-0,89	–	–
Bardzo łatwe	0,90-1,00	–	–

Spośród zadań umieszczonych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego były dwa zadania bardzo trudne. Zadanie najtrudniejsze, to zadanie 9 – dowód z planimetrii. W zestawie nie wystąpiły zadania łatwe i bardzo łatwe.

4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych

Wskaźniki łatwości zadań w województwie są porównywalne z krajowymi i typowe błędy w rozwiązaniach były analogiczne jak w skali kraju.

Analiza jakościowa poszczególnych zadań wykazuje, że zadania egzaminacyjne dobrze ilustrują standardy wymagań egzaminacyjnych.

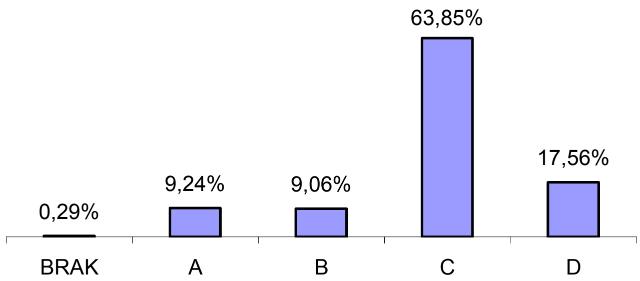
ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM PODSTAWOWY

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.

A. $|x+1| > 5$ **B.** $|x-1| < 2$ **C.** $\left|x+\frac{2}{3}\right| \le 4$ **D.** $\left|x-\frac{1}{3}\right| \ge 3$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do sprawdzenia, czy dana liczba spełnia nierówność (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,71	**0,48**	**0,37**	**0,58**	**0,33**	**0,64**
Poprawna odpowiedź: **C – umiarkowanie trudne**					

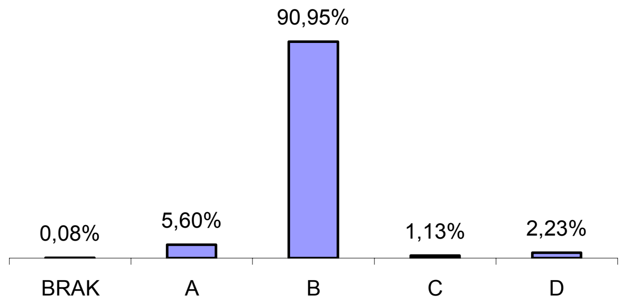


Zadanie 2. *(1 pkt)*

Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje

A. 1701 zł. **B.** 2100 zł. **C.** 1890 zł. **D.** 2091 zł.

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie obliczeń procentowych w sytuacji praktycznej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,93	**0,86**	**0,64**	**0,89**	**0,73**	**0,90**
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**					

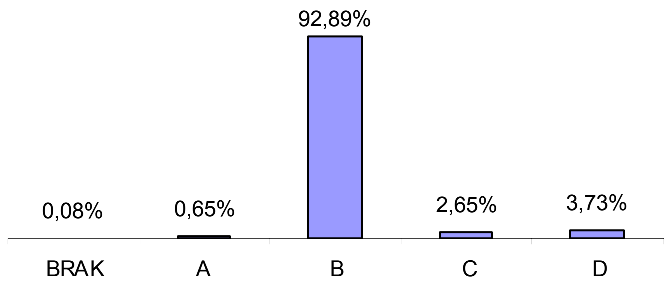


Zadanie 3. ***(1 pkt)***

Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1 - 10b + 3)$ **B.** $5a(a - 2b + 3)$ **C.** $5a(a - 10b + 15)$ **D.** $5(a - 2b + 3)$

Sprawdzane umiejętności Rozłożenie wielomianu na czynniki z zastosowaniem wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias (standard I).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,94	**0,92**	**0,73**	**0,92**	**0,78**	**0,92**
Poprawna odpowiedź: **B – łatwe**					

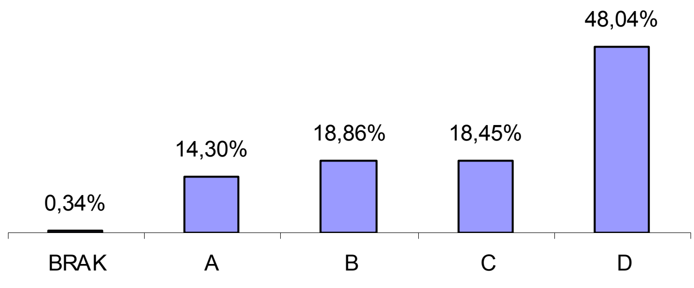


Zadanie 4. ***(1 pkt)***

Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a = -1$ **B.** $a = 0$ **C.** $a = 2$ **D.** $a = 3$

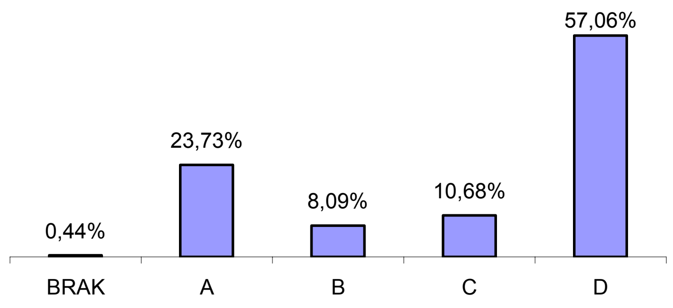
Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie układu równań (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,56	**0,28**	**0,31**	**0,39**	**0,27**	**0,49**
Poprawna odpowiedź: **D – trudne.**					



Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Rozwiązanie równania $x(x+3)-49=x(x-4)$ należy do przedziału

A. $(-\infty,3)$ **B.** $(10,+\infty)$ **C.** $(-5,-1)$ **D.** $(2,+\infty)$

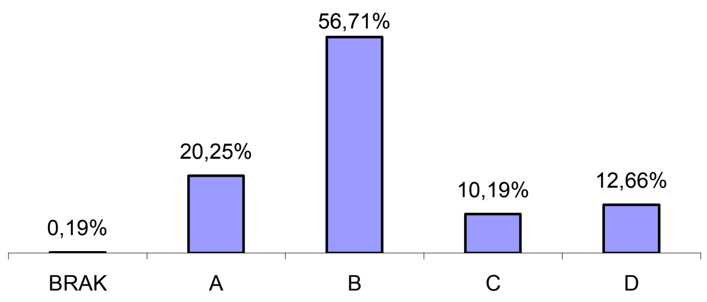
Sprawdzane umiejętności Rozwiązanie równania liniowego i sprawdzenie, czy rozwiązanie należy do danego przedziału (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,66	**0,47**	**0,29**	**0,46**	**0,32**	**0,57**
Poprawna odpowiedź: **D – umiarkowanie trudne**					



Zadanie 6. ***(1 pkt)***
Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

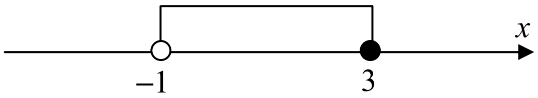
A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

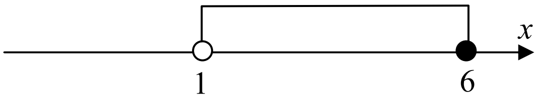
Sprawdzane umiejętności Sprawdzenie, które z podanych liczb spełniają nierówność i wybranie z nich najmniejszej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,64	**0,44**	**0,40**	**0,49**	**0,32**	**0,58**
Poprawna odpowiedź: **B – umiarkowanie trudne**					

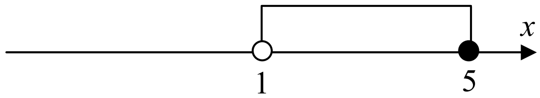


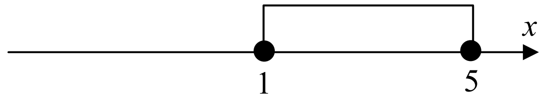
Zadanie 7. ***(1 pkt)***

Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \le 0$ i $x > 1$.

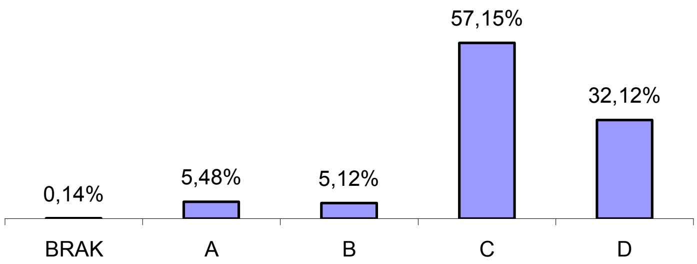
A.


B.


C.


D.


Sprawdzane umiejętności Zinterpretowanie rozwiązania nierówności kwadratowej i liniowej na osi liczbowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,65	**0,44**	**0,38**	**0,50**	**0,38**	**0,58**
Poprawna odpowiedź: **C – umiarkowanie trudne**					

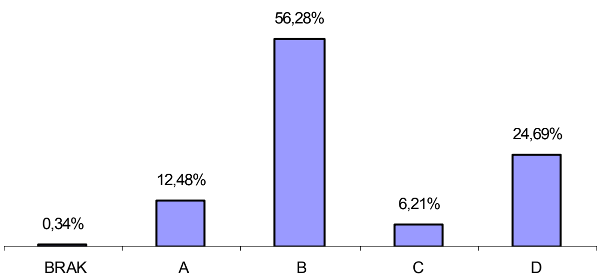


Zadanie 8. ***(1 pkt)***

Wyrażenie $\log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

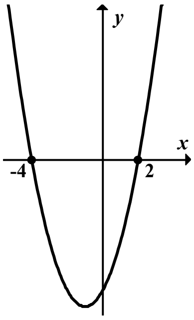
A. $x \le \frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{1}{2}$ **C.** $x \le 0$ **D.** $x > 0$

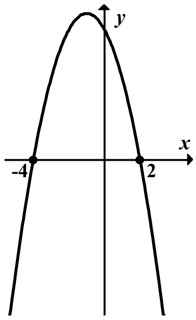
Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie definicji logarytmu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,64	**0,48**	**0,46**	**0,48**	**0,34**	**0,58**
Poprawna odpowiedź: **B – umiarkowanie trudne.**					

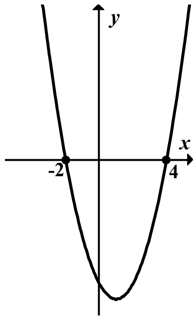


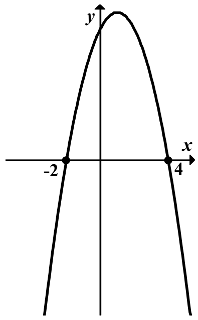
Zadanie 9. ***(1 pkt)***

Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A.


B.


C.


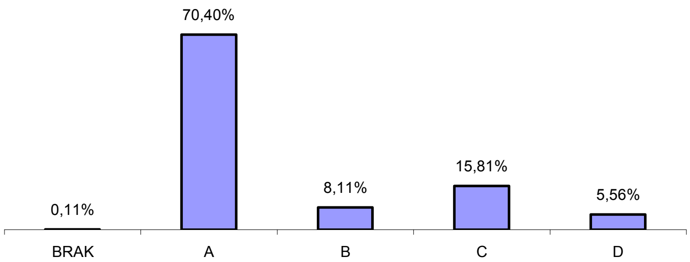
D.


Sprawdzane umiejętności

Określenie funkcji za pomocą wzoru i interpretowanie wykresów funkcji kwadratowych (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,78	**0,55**	**0,32**	**0,64**	**0,36**	**0,70**

Poprawna odpowiedź: **A – łatwe.**

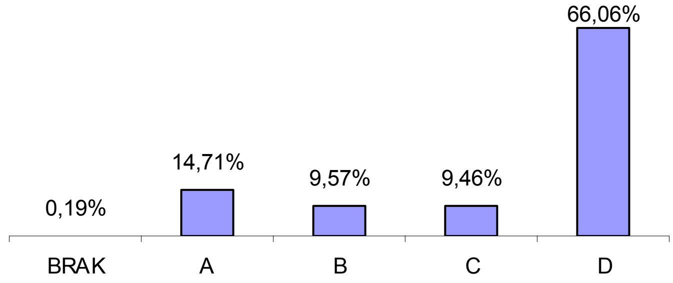


Zadanie 10 ***(1 pkt)***

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie miejsca zerowego funkcji liniowej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,75	**0,55**	**0,37**	**0,56**	**0,33**	**0,66**
Poprawna odpowiedź: **D – umiarkowanie trudne.**					

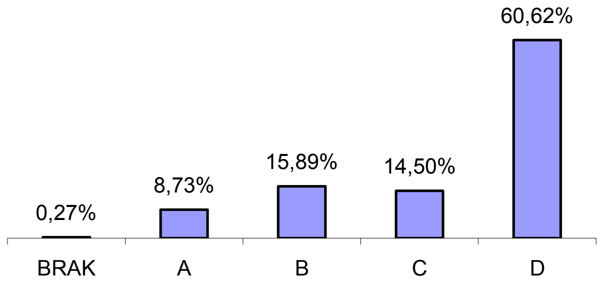


Zadanie 11. ***(1 pkt)***

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ **B.** $a_1 = \frac{4}{9}$ **C.** $a_1 = \frac{3}{2}$ **D.** $a_1 = \frac{9}{4}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie wzory na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,69	**0,42**	**0,29**	**0,53**	**0,23**	**0,61**
Poprawna odpowiedź: **D – umiarkowanie trudne.**					

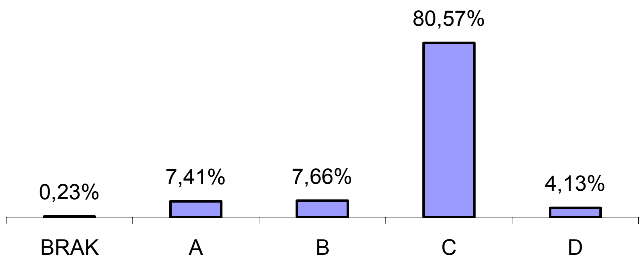


Zadanie 12. ***(1 pkt)***

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ **B.** $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ **C.** $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ **D.** $a_5 + a_7 = 2a_8$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,84	**0,64**	**0,56**	**0,79**	**0,62**	**0,81**
Poprawna odpowiedź: **C – łatwe.**					



Zadanie 13. ***(1 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

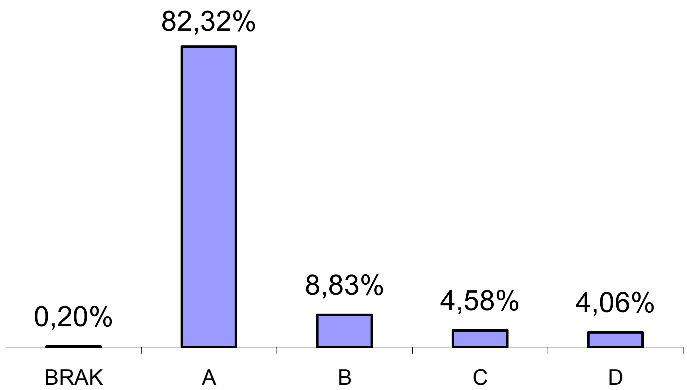
A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego, gdy dana jest wartość jednej z nich (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,87	**0,73**	**0,46**	**0,80**	**0,49**	**0,82**
Poprawna odpowiedź: **A – łatwe.**					

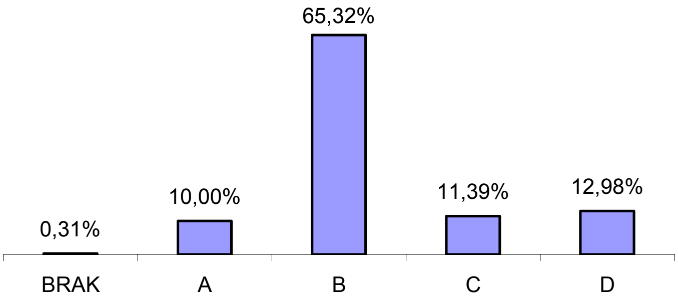


Zadanie 14. ***(1 pkt)***

Wartość wyrażenia $\dfrac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa

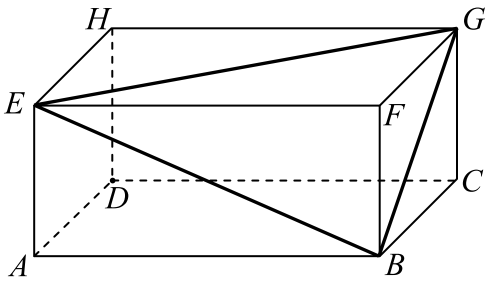
A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,72	**0,45**	**0,42**	**0,58**	**0,38**	**0,66**
Poprawna odpowiedź: **B – umiarkowanie trudne.**					



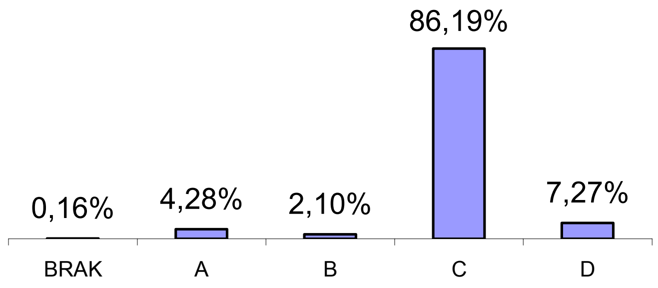
Zadanie 15. ***(1 pkt)***

W prostopadłościanie *ABCDEFGH* mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków *AB*, *BG*, *GE*, *EB* jest najdłuższy?

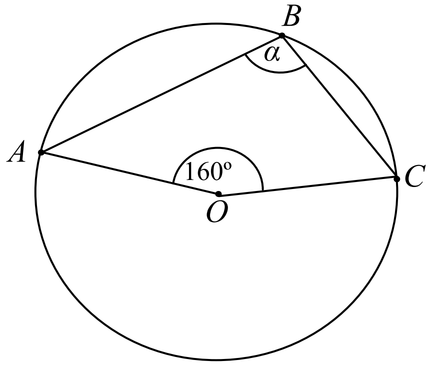


A. *AB* **B.** *BG* **C.** *GE* **D.** *EB*

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w przestrzeni (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,89	**0,71**	**0,74**	**0,84**	**0,77**	**0,86**
Poprawna odpowiedź: **C – łatwe.**					

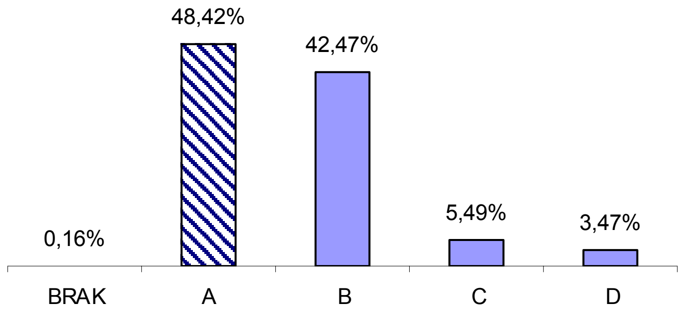


Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. 80° **B.** 100° **C.** 110° **D.** 120°

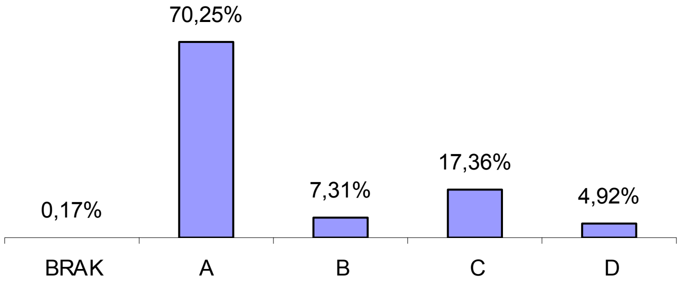
Sprawdzane umiejętności Skorzystanie ze związków między kątem środkowym i kątem wpisanym (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,47	**0,31**	**0,31**	**0,36**	**0,33**	**0,42**
Poprawna odpowiedź: **B – trudne**					



Zadanie 17. ***(1 pkt)***
Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym $60°$ jest równa

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 6

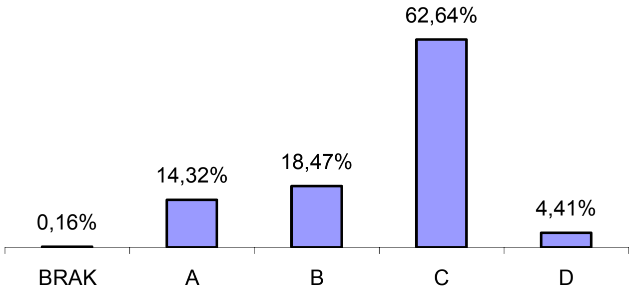
Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich (standard IV).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,75	**0,48**	**0,43**	**0,64**	**0,52**	**0,70**
Poprawna odpowiedź: **A – łatwe**					



Zadanie 18. ***(1 pkt)***
Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

B. $y = -2x + 3$ **B.** $y = 2x + 1$ **C.** $y = 2x + 5$ **D.** $y = -x + 1$

Sprawdzane umiejętności Zbadanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,73	**0,37**	**0,27**	**0,52**	**0,22**	**0,63**
Poprawna odpowiedź: **C – umiarkowanie trudne.**					

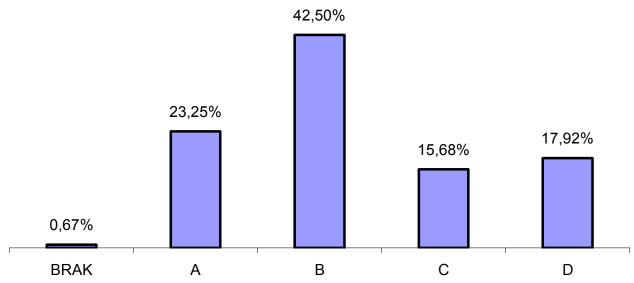


Zadanie 19. ***(1 pkt)***

Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu

A. $x = 1$ **B.** $x = 3$ **C.** $y = 0$ **D.** $y = 4$

Sprawdzane umiejętności					
Posłużenie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ i sprawdzanie czy dana prosta jest styczną do danego okręgu (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,50	**0,33**	**0,36**	**0,32**	**0,32**	**0,43**
Poprawna odpowiedź: **B – trudne**					

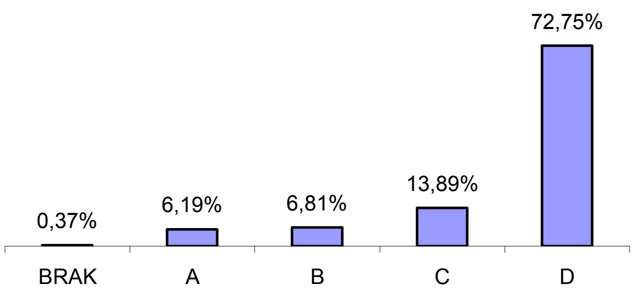


Zadanie 20. ***(1 pkt)***

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** $3\sqrt{3}$

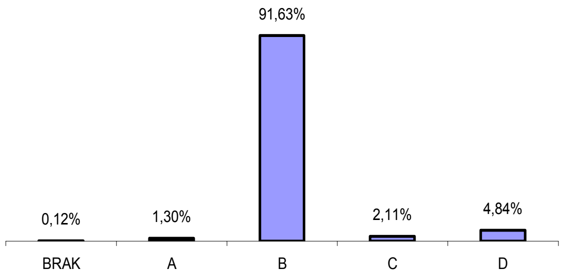
Sprawdzane umiejętności					
Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,78	**0,52**	**0,40**	**0,66**	**0,36**	**0,72**
Poprawna odpowiedź: **D – łatwe**					



Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π **B.** 96π **C.** 64π **D.** 32π

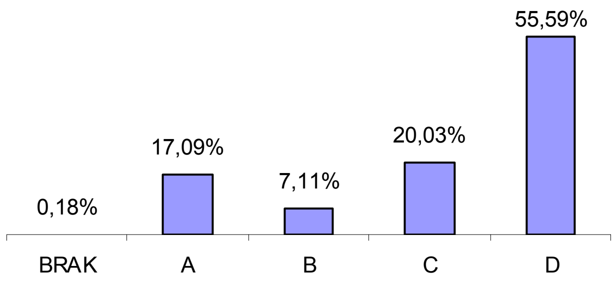
Sprawdzane umiejętności Wyznaczenie związków miarowych w bryłach obrotowych (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,94	**0,80**	**0,70**	**0,90**	**0,74**	**0,91**
Poprawna odpowiedź: **B – bardzo łatwe**					



Zadanie 22. ***(1 pkt)***
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia (standard III).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,64	**0,34**	**0,25**	**0,46**	**0,36**	**0,55**
Poprawna odpowiedź: **D – umiarkowanie trudne**					



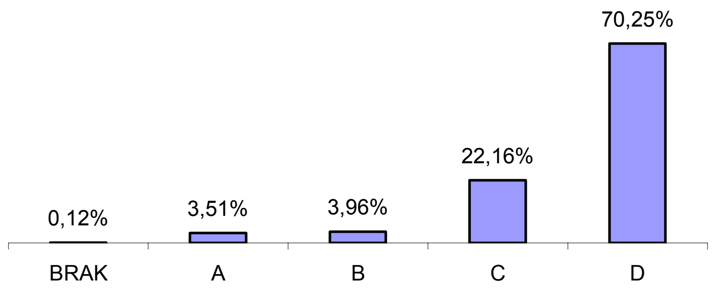
Zadanie 23. ***(1 pkt)***
Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?” Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Sprawdzane umiejętności Obliczenie średniej arytmetycznej (standard II).					
Wskaźnik łatwości zadania dla					
LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**	**razem**
0,77	**0,48**	**0,39**	**0,62**	**0,36**	**0,70**
Poprawna odpowiedź: **D – łatwe**					



Uwaga:
Łatwość zadania zamkniętego może być inna niż wybór werstraktora, ponieważ wybory dystraktorów są podane dla jednej z wersji arkusza.

Zadania otwarte

Zadanie 24. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

Sprawdzane umiejętności:
Rozwiązanie nierówności kwadratowej (standard II – Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,68 – umiarkowanie trudne	**0,75**	**0,46**	**0,26**	**0,62**	**0,25**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $3x^2 - 10x + 3$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

  $\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$ i stąd $x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ oraz $x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

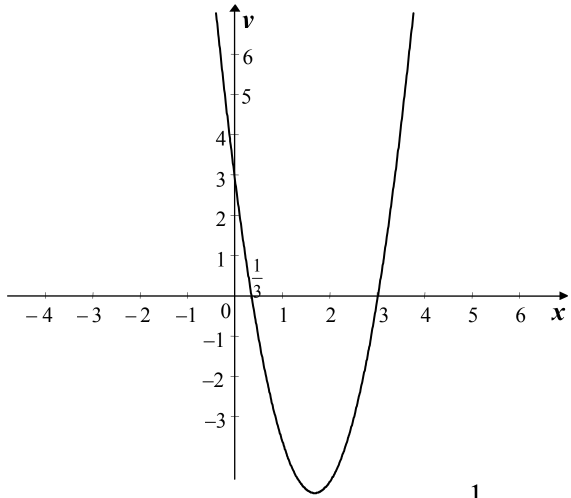
  $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 1$ i stąd $x_1 = \frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 3$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając na wykresie

  $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$ lub $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$

lub



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\frac{1}{3} \le x \le 3$ lub $\left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$ lub $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=3x^2-10x+3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność

albo

- realizując pierwszy etap, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy:

poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle \frac{1}{3},\ 3\right\rangle$ lub $x\in\left\langle \frac{1}{3},\ 3\right\rangle$, lub $\frac{1}{3}\le x\le 3$

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających **łatwe.**
Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność: rozwiązywanie nierówności kwadratowej. Mimo iż ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie CKE i OKE), to nieco ponad 50% zdających rozwiązało to zadanie poprawnie, pozostali zdający nadal popełniali błędy na różnych etapach rozwiązywania zadania:

- obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego, np. $\Delta=-100-4\cdot 3\cdot 3=-136$
- podając jego pierwiastki, np.: $x_1=\frac{-10-8}{2}=-9$, $x_2=\frac{-10+8}{2}=-1$

lub

- zapisując zbiór rozwiązań, np. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right)$ albo $x\in\left(-\frac{1}{3},3\right)$.

Odnotowano również rozwiązania, w których zdający popełnili błędy rachunkowe przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu zapisywali zbiór rozwiązań nierówności. Za takie rozwiązania zdający mogli otrzymać 1 punkt.

Niestety, grupa około 20% zdających nie otrzymała nawet jednego punktu za rozwiązanie tej nierówności kwadratowej.

Zadanie 25. ***(2 pkt)***

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

Sprawdzane umiejętności:

Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia (standard V – Rozumowanie i argumentacja).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,13 – bardzo trudne	**0,20**	**0,01**	**0,00**	**0,03**	**0,00**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Ponieważ $a+b=1$, więc $(a+b)^2=1$, czyli $a^2+2ab+b^2=1$.

Ponieważ $a^2+b^2=7$, więc $2ab+7=1$. Stąd mamy $ab=-3$ i $a^2b^2=(ab)^2=9$.

Stosując wzory skróconego mnożenia, zapisujemy wyrażenie $a^4+b^4=31$ w postaci: $(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=31$, czyli $7^2-2\cdot 9=31$, co należało uzasadnić.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- korzystając z założeń obliczy, że $ab=-3$, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- przekształci tezę w sposób równoważny do postaci $a^2b^2=9$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla absolwentów LO trudne, a dla pozostałych zdających **bardzo trudne**. Zadania typu „*Wykaż…*” z reguły budzą obawy zdających. Tak było również w tym przypadku. Ponad 25% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Najczęściej zdający, aby uzasadnić tezę, rozwiązywali układ, $\begin{cases} a^2+b^2=7 \\ a+b=1 \end{cases}$

Np. podstawiali $b=1-a$ do równania $a^2+b^2=7$, stąd otrzymywali równanie $a^2+(1-a)^2=7$, które jest równoważne równaniu $2a^2-2a-6=0$, czyli $a^2-a-3=0$.

Obliczali $\Delta=13$ oraz $a_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $a_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Przeważnie na tym kończyli.

Za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali 1 punkt.

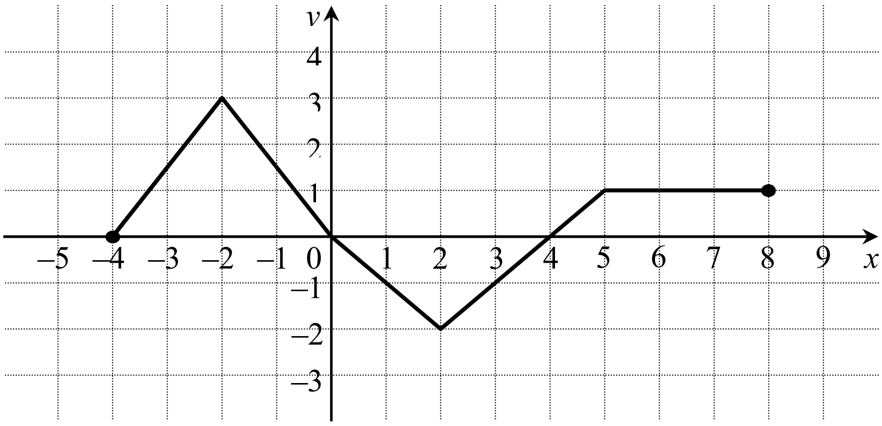
Błędy w rozwiązaniu zadania pojawiały się na różnych etapach, także już w pierwszej fazie rozwiązywania. Zdający nie potrafili poprawnie zastosować, np.:

- wzoru skróconego mnożenia, np.: $(a+b)^2=1$ to $a^2+b^2=1$ albo $(a^2+b^2)^2-\underline{2ab}=31$.
- wiadomości o pierwiastkach, mylili: a_1 i a_2 z a i b
- działań na liczbach typu $x=a+b\sqrt{c}$

Błędem rzadziej popełnianym niż w roku ubiegłym było dowodzenie prawdziwości tezy dla kilku wybranych liczb i wnioskowanie na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb spełniających założenie.

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji *f*,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

Sprawdzane umiejętności:
Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu (standard II – Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,49 – trudne	**0,59**	**0,26**	**0,12**	**0,37**	**0,16**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>:

Odczytujemy z wykresu zbiór wartości funkcji: $\langle -2, 3\rangle$.

Zapisujemy przedział maksymalnej długości, w którym funkcja jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$.

<u>Przydział punktów za zadanie</u>

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ i na tym poprzestanie

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ i błędnie zapisze przedział maksymalnej długości, w którym ta funkcja jest malejąca

albo

- zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$ i na tym poprzestanie

albo

- zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca, np.: $\langle -2, 2\rangle$ i błędnie zapisze zbiór wartości funkcji f .

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ oraz przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność odczytywania podstawowych własności funkcji z jej wykresu. Tylko 32,56 % zdających poprawnie

odczytało i zapisało wskazane własności funkcji, otrzymując tym samym 2. Niestety, 30,55 % zdających nie udzieliło poprawnej odpowiedzi do żadnego z podanych poleceń.

Zdający mylili zbiór wartości funkcji z jej dziedziną, stąd często pojawiała się odpowiedź $\langle -4, 8\rangle$ albo zapisywali zbiór wartości funkcji w postaci $(-2, 3)$ lub $\langle 3, -2\rangle$. Podobnie, w przypadku zapisu przedziału maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca, pojawiały się błędne zapisy przedziału, np. $\{-2, 2\}$ lub $(3, -2)$ czy też niepoprawne sformułowania postaci „f jest malejąca od $(-2, 3)$ do $(2, -2)$”.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

Sprawdzane umiejętności:

Zastosowanie wzorów na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystanie własności trzech kolejnych wyrazów do obliczenia wyrazów ciągu (standard III – Modelowanie matematyczne).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	LP	LU	T	TU
0,50 – trudne	**0,62**	**0,17**	**0,07**	**0,35**	**0,08**

Przykładowe poprawne sposoby rozwiązania:

I. Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, stąd $2y = x + 19$.

Zapisujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $x = -1$ i $y = 9$.

II. Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Niech r będzie różnicą tego ciągu i $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$, $19 = a_3 = a_1 + 2r$.

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r = 8 \\ a_1 + 2r = 19 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a_1 = -1$, $r = 10$, stąd: $x = a_1 = -1$, $y = a_2 = 9$.

Przydział punktów za zadanie

I Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie, np.: $2y = x + 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

II. Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy wprowadzi oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$ i zapisze równanie $a_1 + 2r = 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne, dla absolwentów TU i LU bardzo trudne, dla LO umiarkowanie trudne. Około 10% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności

ciągu arytmetycznego), trudności pojawiły się jednak na etapie rozwiązywania układu równań.
Najczęściej powtarzające się błędy w rozwiązaniach zadania, to:

- błędy rachunkowe w przekształceniach układu równań i równości
- sprawdzanie warunków zadania dla kilku wybranych wartości x i y i na podstawie tych obliczeń formułowanie odpowiedzi, często błędnej
- mylenie ciągów i zapisywanie wzorów dla ciągu geometrycznego
- błędy rachunkowe przy próbach wyznaczania różnicy ciągu arytmetycznego.

Często pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali (bez obliczeń): $x=-1$, $y=9$
Za takie rozwiązanie, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali 1 punkt.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Sprawdzane umiejętności:
Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,35 – trudne	**0,48**	**0,08**	**0,03**	**0,19**	**0,02**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Sprowadzamy wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$. Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$, a stąd $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Przydział punktów za zadanie:

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- sprowadzi wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- doprowadzi wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do postaci $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla absolwentów LO trudne, a dla pozostałych zdających bardzo trudne. W rozwiązaniu najważniejszy był wybór metody i konsekwentne przeprowadzenie rozwiązania do końca. Zdający najczęściej stosowali I sposób rozwiązania, czyli sprowadzali wyrażenie do wspólnego mianownika i stosowali jedynkę trygonometryczną. Wielu piszących po sprowadzeniu wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika błędnie dodawało do siebie dwa wyrażenia, np. dodając lub mnożąc liczniki i mianowniki. Zdarzały się

rozwiązania, w których po sprowadzeniu wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do postaci $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2$ zdający nie potrafili przekształcić wyrażenia do postaci $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$.
Zdający często zapisywali $\sin\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha$ lub analogicznie $\cos\alpha\cdot\cos\alpha=2\cos\alpha$. Wielu zdających nie poradziło sobie z umiejętnością sprowadzenia wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$ do wspólnego mianownika, zapisując np.: $\frac{2\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2$. Część z nich po poprawnym sprowadzeniu wyrażenia do wspólnego mianownika błędnie skracała wyrażenia algebraiczne. Ci którzy poprawnie sprowadzili wyrażenie do wspólnego mianownika niejednokrotnie zostawiali licznik w postaci $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ lub $\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha$, nie zauważając jedynki trygonometrycznej. Zdarzały się rozwiązania, w których podczas mnożenia wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ przez 2 pojawiał się wynik $2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha$. Czasami po otrzymaniu prawidłowego wyniku uczniowie dalej przekształcali równanie, co świadczyć może o niezrozumieniu polecenia.
Sporadycznie pojawiały się rozwiązania, w których zdający wykorzystywali twierdzenie o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności.

Bardzo rzadko uczniowie podejmowali próby rozwiązania zadania innymi metodami.
Często zdarzały się prace, gdzie zdający bez uzasadnienia zapisywali, że $\alpha=45°$ albo też przyjmowali, że $\alpha=30°$ lub $\alpha=60°$ i z tablic odczytywali wartości funkcji trygonometrycznych dla tych kątów.
Zdarzały się rozwiązania, w których uczniowie zapisywali poprawnie układ równań $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$, nie potrafili go jednak poprawnie rozwiązać do końca.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

Sprawdzane umiejętności

Uzasadnienie, że wskazany kąt jest prosty . Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V – Rozumowanie i argumentacja).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,07 – bardzo trudne	**0,11**	**0,00**	**0,00**	**0,01**	**0,00**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>:

Niech $|\angle CED| = \alpha$. Ponieważ trójkąt DCE jest równoramienny i $|EC| = |CD|$, to $|\angle EDC| = |\angle CED| = \alpha$. Zatem $|\angle DCE| = 180^\circ - 2\alpha$.

Podobnie, ponieważ trójkąt ABE jest równoramienny i $|\angle AEB| = |\angle EAB| = \beta$, to $|\angle ABE| = 180^\circ - 2\beta$.

Kąty ABE i DCE są kątami wewnętrznymi trapezu $ABCD$ i $|\angle DCE| + |\angle ABE| = 180^\circ$.

Stąd $180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$, czyli

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$.

Zatem $|\angle AED| = 180^\circ - |\angle CED| - |\angle AEB| = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

<u>Przydział punktów za zadanie:</u>

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy napisze zależności między miarami kątów w trójkątach równoramiennych ABE i DCE, np. $|\angle DCE| = 180^\circ - 2\alpha$ i $|\angle ABE| = 180^\circ - 2\beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy poprawnie uzasadni, że $|\angle AED| = 90^\circ$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne i jednocześnie było dla nich najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu. Najczęściej też je opuszczano.

Rozwiązywanie zadań z planimetrii, a w szczególności dotyczących przeprowadzenia dowodu geometrycznego, jest dla maturzystów bardzo dużym problemem, bez względu na stopień ich złożoności. W omawianym zadaniu zdający mieli przeprowadzić proste rozumowanie oparte na własnościach trójkąta równoramiennego oraz związkach miarowych kątów w trapezie.

Rozwiązując tego typu zadania, zdający rzadko uzasadniają własności figur. Nie powołują się na odpowiednie twierdzenia i definicje, na których opierają swoje wnioski. Często zmieniają warunki zadania w celu uproszczenia jego rozwiązania.

Najczęściej powtarzające się błędy

Zdający przyjmowali dodatkowe założenia dotyczące czworokąta $ABCD$ i sprowadzali rozwiązanie do szczególnego przypadku, gdy czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym albo równoległobokiem. W skrajnych przypadkach zakładano, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Występowało również rozwiązanie, w którym po przedłużeniu boków czworokąta $ABCD$ oraz odcinków AE i DE, zdający zakładał, że otrzymał romb i korzystał z faktu, że przekątne rombu są prostopadłe.

Częstym błędem było dowodzenie tezy poprzez założenie jej prawdziwości.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Sprawdzane umiejętności

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,42 – trudne	**0,50**	**0,27**	**0,07**	**0,34**	**0,15**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania: (metoda klasyczna)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającym na otrzymaniu liczb, których suma jest podzielna przez 3, np. wypisując je i zliczając:

$$A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(2,7),(3,3),(3,6),(4,2)$$
$$(4,5)(5,1),(5,4),(5,7),(6,3),(6,6),(7,2),(7,5)\}, \text{ czyli } |A| = 16$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{16}{49}$.

Przydział punktów za zadanie:

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy:

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 16$

Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{16}{49}$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Było to bardzo typowe zadanie, w którym zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa” to najczęściej stosowany sposób rozwiązania zadania. Rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych.. W większości zdający poprawnie stosowali definicję klasyczną prawdopodobieństwa, chociaż odnotowano również niepoprawne stosowanie klasycznej definicji - dzielenie mocy zbioru Ω przez moc zbioru A. Zdarzyły się błędy rachunkowe, np. przy skracaniu ułamków. Poza tym grupa zdających miała problem ze zliczeniem wszystkich zdarzeń elementarnych. Często zapisywali $|\Omega| = 14$ lub $|\Omega| = 7^3$. Najwięcej problemów jednak sprawiło zdającym zliczenie zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A. Zazwyczaj liczba zliczanych zdarzeń elementarnych była niepełna np. $|A| = 10$ lub $|A| = 15$. Dodatkowo przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A pojawiały się takie, które nie spełniały warunków zadania.

W schemacie oceniania uwzględniono cztery sposoby rozwiązania zadania. Dwa ostatnie sposoby rozwiązania dotyczyły „metody drzewa”.

Zdający otrzymał 1 punkt, gdy narysował pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opisał prawdopodobieństwo lub narysował drzewo tylko z istotnymi gałęziami. Drugi punkt otrzymał, gdy obliczył prawdopodobieństwo zdarzenia A. Najczęściej zdający błędnie opisywali prawdopodobieństwa na istotnych gałęziach, w części rozwiązań zdający nie

opisywali prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa. Często narysowane drzewa nie zawierały istotnych gałęzi, były niekompletne lub przy obliczaniu prawdopodobieństwa brano pod uwagę gałęzie, które nie spełniały warunków zadania lub też dodawano prawdopodobieństwo na gałęziach drzewa. Zdający, którzy wybrali II sposób rozwiązania, często tworząc tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu, zapominali o jednym lub dwóch wierszach (kolumnach) i tworzyli tabelę par (a,b) o wymiarach 6x7 lub 6x6. Zdarzały się rozwiązania, w których zdający rozwiązywali zadanie o innej treści – losowanie bez zwracania. W wielu przedstawionych rozwiązaniach zabrakło refleksji i poprawienia rozwiązania, gdy otrzymany wynik prawdopodobieństwa zdarzenia był większy od 1.

Zadanie 31. ***(4 pkt)***

Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Sprawdzane umiejętności:
Wyznaczenie współrzędnych punktu styczności prostej z okręgiem
(standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,21 – trudne	**0,30**	**0,00**	**0,01**	**0,09**	**0,00**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>:

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy m prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$: $m=-\frac{1}{2}$.

Zapisujemy równanie prostej prostopadłej do stycznej i przechodzącej przez punkt $S=(3,7)$:

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2} \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}=2x-3$, otrzymujemy $x=\frac{23}{5}$. Stąd $y=\frac{31}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.

Przydział punktów za zadanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało na zapisaniu współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x - 3$, np. $m = -\frac{1}{2}$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na zapisaniu układ równań $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$ – zdający otrzymywał **2 punkty.**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na przekształceniu układu równań do równania z jedną niewiadomą, np. $-\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} = 2x - 3$ lub $y = -\frac{1}{4}y - \frac{3}{4} + \frac{17}{2}$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na obliczeniu współrzędnych punktu styczności: $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla absolwentów LO trudne, a dla pozostałych zdających bardzo trudne.

Celem zadania było sprawdzenie, czy zdający potrafią wyznaczyć współrzędne punktu styczności prostej z okręgiem.

W schemacie oceniania umieszczono trzy sposoby rozwiązania zadania.

Zdający, którzy wybrali I sposób rozwiązania, najczęściej rozwiązywali to zadanie z sukcesem.

Najczęstsze błędy w tym sposobie: zdający przy właściwie wyznaczonym współczynniku kierunkowym prostej błędnie wyznaczali współczynnik b (wielu z tym błędem konsekwentnie rozwiązywało zadanie do końca poprawnie). Zdarzało się również, że przy właściwie wyznaczonej prostej prostopadłej występowały błędy w rozwiązaniu układu równań, czyli w konsekwencji zdający źle wyznaczali współrzędne punktu przecięcia prostych (błędy najczęściej pojawiały się w wykonywaniu działań na ułamkach zwykłych). Często zdający błędnie wyznaczali współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej (nie wykorzystywali warunku $a_1 a_2 = -1$) lub też kończyli rozwiązanie zadania na tym etapie. Część zdających zapisywała błędny układ równań $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Zdający, którzy wybrali II sposób rozwiązania (obliczanie odległości), najczęściej dobrze obliczali odległość punktu S od danej prostej, często zauważali, że jest to długość promienia i zapisywali równanie $(x-3)^2 + (y-7)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$ lub $\sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, ale często nie potrafili tego połączyć z daną prostą lub błędnie wyznaczali odległość środka okręgu $S = (3,7)$ od prostej $y = 2x - 3$. W wyniku wcześniej popełnionych błędów zdający otrzymywali dwa punkty styczności prostej z okręgiem i taką podawali odpowiedź.

Egzaminatorzy zaobserwowali również fakt, że wielu zdających rozpoczynało rozwiązanie zadania kilkoma metodami i nie doprowadzało rozwiązania do końca. Duża grupa zdających nie podjęła próby rozwiązania zadania.

Zadanie 32. ***(5 pkt)***

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Sprawdzane umiejętności:
Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (standard III – Modelowanie matematyczne).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,39 – trudne	**0,50**	**0,07**	**0,07**	**0,25**	**0,09**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Drogę przebytą przez turystę opisujemy równaniem $x \cdot y = 112$.

Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas zapisujemy równanie: $(x+3)\cdot(y-12)=112$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy i wstawiamy do drugiego $\begin{cases} x = \dfrac{112}{y} \\ \left(\dfrac{112}{y}+3\right)(y-12)=112 \end{cases}$

Rozwiązujemy równanie $\left(\dfrac{112}{y}+3\right)(y-12)=112$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2-12y-448=0$

$\Delta = 144+1792=1936=44^2$

$y_1=\dfrac{12-44}{2}=-16$ sprzeczne z zał. $y>0$, $\quad y_2=\dfrac{12+44}{2}=28$

Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymywał 1 punkt za zapisanie zależności między przebytą drogą, liczbą dni wędrówki oraz liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę w postaci równania, np.:
$(x+3)\cdot(y-12)=112$ albo $x\cdot y=112$.

Zdający otrzymywał 2 punkty za zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y – odpowiednio: liczbą dni wędrówki i liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę, np. $\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$

Zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i otrzymywał 3 punkty za zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np: $(x+3)\left(\dfrac{112}{x}-12\right)=112$ lub $\left(\dfrac{112}{y}+3\right)(y-12)=112$ lub $x\cdot(4x+12)=112$ lub $\left(\dfrac{1}{4}y-3\right)\cdot y=112$.

Zdający otrzymywał 5 punktów za obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę: 28 km.

Natomiast, gdy zdający rozwiązał równanie z niewiadomą x bezbłędnie i nie obliczył liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę albo rozwiązał równanie z niewiadomą x lub y z błędem rachunkowym i konsekwentnie obliczył liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę, to otrzymywał **4 punkty.**

Komentarz:

Zadanie okazało się dla zdających **trudne**.

Najczęściej zdający poprawnie zapisywali równanie $x \cdot y = 112$ lub układ równań

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)\cdot(y-12) = 112 \end{cases}$$ i na tym kończyli rozwiązanie.

Za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali 1(za zapisanie tylko jednego z równań) lub 2 punkty.

Stosunkowa często pojawiały się rozwiązania, w których zdający zapisywali (bez obliczeń), że turysta wędrował 4 dni i przebywał dziennie 28 kilometrów. Za takie rozwiązanie, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali **1 punkt**.

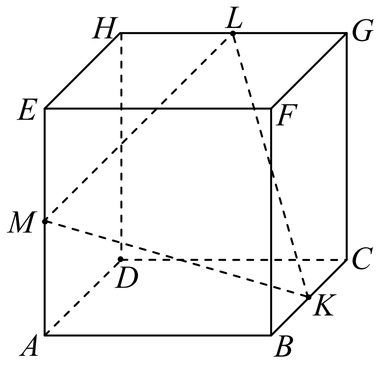
Błędy w rozwiązaniu zadania pojawiały się na różnych etapach.

Zdający, np.:

- błędnie rozwiązywali równanie kwadratowe $y^2 - 12y - 448 = 0$, np. zamiast $y_1 = -16$, $y_2 = 28$ otrzymywali $y_1 = -28$, $y_2 = 16$,
- błędnie przekształcali równanie $\left(\frac{112}{y}+3\right)(y-12) = 112$, np. zamiast $112 + 3y - \frac{1344}{y} - 36 = 112$ zapisywali $\frac{112}{y} + 3 \cdot y - 12 = 112$,
- zapisywali zależność między przebytą drogą, liczbą dni wędrówki oraz liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę za pomocą równania, np. $x + y = 112$.

Zdarzało się, że zdający błędnie interpretowali treść zadania i porównywali wielkości różnych typów, np. zapisywali równanie $(x+3)(y-12) = 112$ albo równanie $y - 12 = x + 3$, informując równocześnie, że x – oznacza liczbę kilometrów przebytą każdego dnia, a y – oznacza liczbę dni wędrówki.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***
Punkty *K, L* i *M* są środkami krawędzi *BC, GH* i *AE* sześcianu *ABCDEFGH* o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta *KLM.*



Sprawdzane umiejętności: Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).					
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły				
	LO	**LP**	**LU**	**T**	**TU**
0,28 – trudne	**0,38**	**0,04**	**0,02**	**0,15**	**0,02**

Przykładowe poprawne sposoby rozwiązania:

Trójkąt ABK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$. Stąd $|AK|^2 = \frac{5}{4}$.

Trójkąt MAK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|MK|^2 = |MA|^2 + |AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$.

Analogicznie dla trójkątów MEL i LGK obliczamy kwadraty długości boków ML i KL: $|ML|^2 = |KL|^2 = \frac{3}{2}$.

Ponieważ $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2$, więc trójkąt KLM jest równoboczny.

Zatem jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{|MK|^2\sqrt{3}}{4}$, stąd $P = \frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Uwaga
Zdający nie musi obliczać kwadratów długości boków *ML* i *KL*. Wystarczy, że korzystając z przystawania trójkątów MAK, MEL, LGK uzasadni równość boków: $|ML| = |KL| = |MK|$.

Przydział punktów za zadanie
Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na obliczeniu kwadratów długości boków trójkąta KLM: $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2 = \frac{3}{2}$ lub długości jego boków: $|ML| = |KL| = |MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

albo

obliczeniu kwadratu długości odcinka, np. MK: $|MK|^2 = \frac{3}{2}$ i zauważeniu, że trójkąt *KLM* jest równoboczny. Za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem rozwiązania, zdający otrzymywał **3 punkty**.

Zdający otrzymywał 4 punkty za obliczenie pola trójkąta KLM: $P=\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla zdających **trudne**.

Zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania. Na ogół zauważali, że trójkąt *KLM* jest równoboczny (niewielu zdających uzasadniało, że trójkąt ten jest równoboczny). Trudności pojawiały się przy obliczaniu długości boków trójkąta *KLM* lub pola tego trójkąta.

Najczęściej powtarzające się błędy w rozwiązaniach zadania, to:

- błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, np. przy wyznaczaniu długości boków trójkąta *KLM*. Zdający zamiast zapisu $|MK|^2=|AK|^2+|AM|^2$ zapisywali, np. że $|MK|^2=|AM|^2-|AK|^2$, co w konsekwencji prowadziło do tego, że $|MK|^2<0$.
- błędy przy obliczaniu pola trójkąta *KLM*. Zdający zamiast zapisu $P=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, zapisywali, np. że $P=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$ albo $P=\frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$

Zastanawiający jest brak u sporej grupy zdających umiejętności pierwiastkowania obu stron równania, np. pojawiał się zapis: $a^2+\frac{1}{4}a^2=m^2$, z którego zdający wnioskował, że $m=a+\frac{1}{2}a$.

Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający:

- stosował błędne przybliżenia od początku rozwiązania, np. przy obliczaniu długości *MB*; z tego, że $|MB|^2=1,25$ wnioskował, że $|MB|=1,12$.
- nie zauważał, że trójkąt *KLM* jest równoboczny i konsekwentnie liczył długości boków tego trójkąta i wysokość,
- błędnie zakładał, że odcinki *MB*, *MH*, *KG* są długości 1 i konsekwentnie obliczał długości boków trójkąta *KLM* albo błędnie przyjmował, że równej długości są odcinki *MH* i *ML*, *LK* i *KG*, *MK* i *AK*.

ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. ***(4 pkt)***
Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie cech podzielności liczb całkowitych
(standard III – Użycie i tworzenie strategii)

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,28 – trudne	**0,30**	**0,00**	**0,09**	**0,29**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Przekształcamy wyrażenie $k^6 - 2k^4 + k^2$ do postaci iloczynowej:
$k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2\left(k^2 - 1\right)^2 = \left[\left(k-1\right)k(k+1)\right]^2$.

Wykazujemy, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 6.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Kwadrat iloczynu tych liczb jest podzielny przez 36. Zatem liczba postaci $k^6 - 2k^4 + k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

Przydział punktów za zadanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało na zapisaniu liczby $n^2 = k^6 - 2k^4 + k^2$ w jednej z następujących postaci iloczynowych: $k^2\left(k^2-1\right)^2$ lub $\left[k\left(k^2-1\right)\right]^2$, lub $\left[k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$, lub $k^2\left[\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$, lub $\left(k^3-k\right)^2$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na wykazaniu podzielności liczby n przez 2 albo przez 36 – zdający otrzymywał **2 punkty**.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na wykazaniu podzielności liczby n przez 2 i przez 3 albo stwierdzeniu, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6 – zdający otrzymywał **3 punkty**.
Rozwiązanie pełne polegało na wyciągnięciu wniosku o podzielności liczby n^2 przez 36 – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne, dla absolwentów TU i LU bardzo trudne. Prawie 7% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu, co potwierdza, że zadania typu „*Wykaż…*” budzą obawy także wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym.

Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem liczby $k^6 - 2k^4 + k^2$ jako iloczynu kolejnych trzech liczb całkowitych $\left[k\left(k-1\right)\left(k+1\right)\right]^2$. Trudności pojawiały się na etapie uzasadnienia, że liczba $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ jest podzielna przez 6.

Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający dowodzili, stosując indukcję matematyczną, i nie uzasadniali prawdziwości tezy dla liczb całkowitych ujemnych. Za ten etap rozwiązania, zgodnie ze schematem oceniania, zdający otrzymywali 1 punkt.

Często popełnianym przez zdających błędem było dowodzenie prawdziwości twierdzenia dla kilku wybranych liczb parzystych, następnie nieparzystych i wnioskowanie na tej podstawie o prawdziwości tezy dla wszystkich liczb całkowitych.

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$, to $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

Sprawdzane umiejętności
Przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego (standard – V Rozumowanie i argumentacja).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	LP	LU	T
0, 68 – umiarkowanie trudne	0,70	0,25	0,45	0,69

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania
Przekształcamy tezę w sposób równoważny.

Mnożymy obie strony równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ przez $(a-c)(b-c)$, otrzymując: $a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$, czyli $ab-ac+ab-bc=2ab-2ac-2bc+2c^2$.

Stąd otrzymujemy $2c^2-ac-bc=0$, czyli $c(2c-a-b)=0$.

Ta ostatnia równość jest prawdziwa, bo z założenia $2c-a-b=0$. Zatem teza też jest prawdziwa.

Przydział punktów za rozwiązanie
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało sprowadzeniu lewej strony równości do wspólnego mianownika: $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na przekształceniu równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ do postaci $a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$ – zdający otrzymywał **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na wykonaniu działań i doprowadzeniu równości do postaci np.: $2c^2-ac-bc=0$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na uzasadnieniu, że $c(2c-a-b)=0$ i wnioskowaniu o prawdziwości równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Niezależnie od zastosowanej metody zadanie wymagało umiejętności wykorzystania założeń do przekształcenia wyrażenia wymiernego. Prawie 13 % zdających nie podjęło próby rozwiązania tego zadania albo nie uzyskało w nim żadnego postępu, co zazwyczaj oznaczało, że nie potrafili oni sprowadzić lewej strony równości do wspólnego mianownika. Natomiast 50,82 % zdających przeprowadziło poprawne rozumowanie, uzyskując maksymalną ilość punktów za przedstawione rozwiązanie.
Zdający najczęściej stosowali I i II sposób rozwiązania zaprezentowany w *Kryteriach oceniania odpowiedzi*, opublikowanych na stronie internetowej CKE. Sporadycznie pojawiały się rozwiązania, w których zdający zauważali, że liczby a, c, b tworzą ciąg arytmetyczny. Pojawiły się też rozwiązania, w których zdający wykazywali prawdziwość tezy dla $c=0$, a następnie wykazywali, że dla $c \neq 0$ spełniona jest równość $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a+b}{c}$.
Zaskakujące było to, że do najczęściej popełnianych błędów należały te, które związane były z elementarnymi umiejętnościami (kształconymi już na poziomie podstawowym), np.:

- niepoprawne przekształcania lewej strony równości – sprowadzenie do wspólnego

mianownika, np.
$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}$ albo $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{a}-\frac{a}{c}+\frac{b}{b}-\frac{b}{c}=\frac{2-a-b}{c}$

- niepoprawne skracanie ułamków, np. $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=-\frac{1}{c}-\frac{1}{c}=-\frac{2}{c}$.
- Zdający, którzy pokonali zasadnicze trudności zadania i doprowadzili równość do postaci $2c^2-ac-bc=0$ często popełniali błąd, dzieląc obie strony równości przez c, bez założenia, co skutkowało otrzymaniem 3 punktów z 4 możliwych do uzyskania za rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 3. ***(6 pkt)***
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (standard IV –Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,50– umiarkowanie trudne	**0,54**	**0,33**	**0,15**	**0,51**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>:

Zapisujemy warunki, jakie muszą być spełnione, aby równanie

$x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ posiadało dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$:

$$\begin{cases}\Delta>0\\(x_1-x_2)^2<8(m+1)\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$: $16m^2-4(-m^3+6m^2+m-2)>0$

$m^3-2m^2-m+2>0$

$(m+1)(m-1)(m-2)>0$, zatem $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Rozwiązujemy nierówność $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$, korzystając ze wzorów Viète'a.

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<8m+8$

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2<8m+8$. Ponieważ $x_1+x_2=4m$ oraz $x_1\cdot x_2=-m^3+6m^2+m-2$, więc

$(4m)^2-4(-m^3+6m^2+m-2)<8m+8$.

Przekształcamy tę nierówność do postaci $4m^3-8m^2-12m<0$, stąd $4m(m-3)(m+1)<0$.

Rozwiązaniem nierówności jest $m\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$.

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów rozwiązań nierówności: $m\in(0,1)\cup(2,3)$.

<u>Przydział punktów za zadanie</u>

Pierwszy etap rozwiązania polegał na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymywał **1 punkt**.

Drugi etap polegał na rozwiązaniu nierówności $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymywał **4 punkty**.

Trzeci etap polegał na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego: $m \in (0,1) \cup (2,3)$. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymywał **1 punkt,** gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) była rozwiązana poprawnie.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymywał za zapisanie wyrażenia $(x_1 - x_2)^2$ w postaci

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ lub $\frac{\Delta}{a^2}$.

3 punkty zdający otrzymywał za zapisanie nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ w postaci nierówności trzeciego stopnia z jedną niewiadomą m, np. $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$.

4 punkty zdający otrzymywał za rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia: $m \in (-\infty,-1) \cup (0,3)$.

Komentarz: Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Jego celem było sprawdzenie, czy maturzysta potrafi zaplanować i zbadać, kiedy równanie kwadratowe z parametrem ma pierwiastki spełniające określone warunki. W schemacie oceniania tego zadania opisano dwie metody rozwiązania różniące się sposobem rozwiązywania nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$. Zazwyczaj zdający przekształcali tę nierówność, wykorzystując wzory Viète'a, ale pojawiały się także rozwiązania, w których zdający wyznaczali pierwiastki x_1, x_2, a następnie kwadrat ich różnicy $(x_1 - x_2)^2 = \left(-2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}\right)^2$ i zapisywali odpowiednią nierówność.
Tylko 26,13 % zdających rozwiązało to zadanie bezbłędnie, a 29,44% zadających nie przystąpiło do rozwiązania tego zadania, bądź nie potrafiło dokonać w jego rozwiązaniu żadnego postępu.
Mimo iż ten rodzaj zadań pojawiał się już w arkuszach egzaminacyjnych, niektórzy zdający nie pamiętali o sprawdzeniu warunku, kiedy równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania. Wielu zdających nie potrafiło rozwiązać nierówności $\Delta > 0$, czyli równania wielomianowego trzeciego stopnia.
Jednak najwięcej błędów maturzyści popełnili podczas doprowadzenia nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ do postaci nierówności z jedną niewiadomą m. Niektórzy zdający:

- nie potrafili zastosować wzorów skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $(x_1 - x_2)^2$, np. $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- popełniali błędy podczas stosowania wzorów Viète'a, np. $x_1 + x_2 = \frac{4m}{2}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{-m^3 + 6m^2 + m - 2}{2}$
- niepoprawnie rozwiązywali nierówność $4m^3 - 8m^2 - 12m < 0$, np. $4m\left(m^2 - 2m - 3\right) < 0$

  $4m < 0$ i $m^2 - 2m - 3 < 0$

  $m \in (-1,0)$
- popełniali błędy nieuwagi, np. $x_1 + x_2 = 4$ i błędy rachunkowe, np.

  $$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} - \frac{4m + 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} = 4m.$$

Zaskakiwały błędy związane z wyznaczeniem części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego, np.: $m \in (-1,1) \cup (2,+\infty)$ i $m \in (-\infty,-1) \cup (0,3)$, czyli $m \in (2,3)$.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

<table>
<tr><td colspan="5">Sprawdzane umiejętności
Rozwiązywanie równania trygonometrycznego (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</td><td colspan="4">Wskaźnik łatwości według typu szkoły</td></tr>
<tr><td>LO</td><td>LP</td><td>LU</td><td>T</td></tr>
<tr><td>0,42 – trudne</td><td>0,45</td><td>0,17</td><td>0,14</td><td>0,42</td></tr>
</table>

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania

Wyłączamy przed nawias $2\sin^2 x$: $2\sin^2 x(1-\cos x) = 1 - \cos x$ i zapisujemy równanie w postaci iloczynowej: $2\sin^2 x(1-\cos x) - (1-\cos x) = 0$, $(2\sin^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$.

Zatem $2\sin^2 x - 1 = 0$ lub $1 - \cos x = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = 1$
$x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$	lub	$x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$	lub	$x = 0$ lub $x = 2\pi$
Albo		albo		albo
$x = 225°$ lub $x = 315°$		$x = 45°$ lub $x = 135°$		$x = 0°$ lub $x = 360°$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ są:

$x = 0$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$, lub $x = \frac{3}{4}\pi$, lub $x = \frac{5}{4}\pi$, lub $x = \frac{7}{4}\pi$, lub $x = 2\pi$

albo

$x = 0°$ lub $x = 45°$, lub $x = 135°$, lub $x = 225°$, lub $x = 315°$, lub $x = 360°$.

Przydział punktów za rozwiązanie

Zdający otrzymywał 1 punkt, gdy zapisał równanie w postaci, np.

$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1 - \cos x$ lub $2\sin^2 x(1-\cos x) - (1-\cos x) = 0$

lub $(2\sin^2 x - 1) - \cos x(2\sin^2 x - 1) = 0$ lub $(2\sin^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$

lub $2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ lub $(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i otrzymywał 3 punkty, gdy rozwiązał jedno z otrzymanych równań: $2\sin^2 x - 1 = 0$ lub $2\cos^2 x - 1 = 0$, lub $1 - \cos x = 0$.

Zdający otrzymywał 4 punkty, gdy zapisał wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale:

$x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$, $x = 2\pi$

albo

$x = 0°$, $x = 45°$, $x = 135°$, $x = 225°$, $x = 315°$, $x = 360°$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla zdających **trudne**.

Zdający na ogół poprawnie przekształcili równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ do postaci iloczynowej: $(2\sin^2 x - 1)(1-\cos x) = 0$ lub $(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

W wielu wypadkach trudność sprawiało zdającym rozwiązanie tych równań i zapisanie rozwiązań we wskazanym przedziale.

<u>Najczęściej popełniane błędy przez zdających w rozwiązaniach tego zadania to:</u>

- dzielenie obu stron równania $2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x$ przez $1-\cos x$ bez odpowiedniego założenia i rozwiązanie tylko równania $2\sin^2 x - 1 = 0$ albo równania $2\cos^2 x - 1 = 0$. Wówczas zdający zgodnie z kryterium oceniania odpowiedzi otrzymywał za całe rozwiązanie **1 punkt.**
- nieuwzględnianie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 1 = 0$ albo równania $2\cos^2 x - 1 = 0$ i ograniczanie się do zapisywania tylko rozwiązań, np. równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ albo równania $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- podawanie rozwiązań w postaci ogólnej, np. $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, $x = 2k\pi$,
- błędy rachunkowe związane z doprowadzaniem do równania trzeciego stopnia z niewiadomą $\cos x$ i wówczas szukanie pierwiastków tego równania lub otrzymanie takiej ich postaci, która znacznie utrudniała lub uniemożliwiała kontynuowanie rozwiązania.

Zadanie 5. ***(4 pkt)***

O ciągu (x_n) dla $n \ge 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \ge 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

Sprawdzane umiejętności

Zastosowanie własności ciągu geometrycznego, wzorów na *n*-ty wyraz tego ciągu i na sumę *n* wyrazów ciągu arytmetycznego (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,45– trudne	**0,48**	**0,08**	**0,18**	**0,45**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równość: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 3^{x_{n+1}-x_n}$.

Zatem $27 = 3^{x_{n+1}-x_n}$. Stąd $x_{n+1} - x_n = 3$ dla $n \ge 1$.

Zauważamy, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej *n*: $x_{n+1} - x_n = 3$, to ciąg (x_n) jest arytmetyczny o różnicy $r = 3$.

Z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy układ równań

$\begin{cases} x_1 + (x_1 + r) + ... + (x_1 + 9r) = 145 \\ r = 3 \end{cases}$. Doprowadzamy układ do postaci: $\begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases}$

Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą: $10x_1 + 135 = 145$. Stąd $x_1 = 1$.

<u>Przydział punktów za rozwiązanie</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało na wykorzystaniu własności ciągu geometrycznego i zapisanie odpowiedniego równania, np.: $27 = 3^{x_{n+1}-x_n}$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na zapisaniu zależności między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu $\left(x_n\right)$: $x_{n+1} - x_n = 3$ (wystarczy zapis, np. $x_2 - x_1 = 3$) – zdający otrzymywał **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu układu równań

$$\begin{cases} x_1 + \left(x_1 + r\right) + ... + \left(x_1 + 9r\right) = 145 \\ r = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \dfrac{2x_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 145 \\ r = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 10x_1 + 45r = 145 \\ r = 3 \end{cases}$$

lub równania $x_1 + \left(x_1 + 3\right) + ... + \left(x_1 + 27\right) = 145$ i przekształceniu do równania w postaci, np.: $10x_1 + 135 = 145$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na obliczeniu x_1: $x_1 = 1$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Zadanie to, w którym należało powiązać ciąg arytmetyczny z geometrycznym oraz rozwiązać proste równanie wykładnicze, okazało się dla zdających trudne. Do rozwiązania zadania wystarczały wiadomości i umiejętności z zakresu podstawowego. Możliwe, że sposób zapisania ciągu $\left(a_n\right)$ za pomocą ciągu $\left(x_n\right)$ spowodował, że wielu zdających nie poradziło sobie z jego rozwiązaniem.

Najczęściej powtarzające się błędy:

Zdający bardzo często popełniali błędy rachunkowe. Zdarzały się przypadki niepoprawnych przekształceń wyrażeń algebraicznych.

Mimo że zdający mogli w czasie egzaminu korzystać z zestawu wybranych wzorów, mylili ciąg arytmetyczny z geometrycznym.

Zadanie 6. ***(4 pkt)***

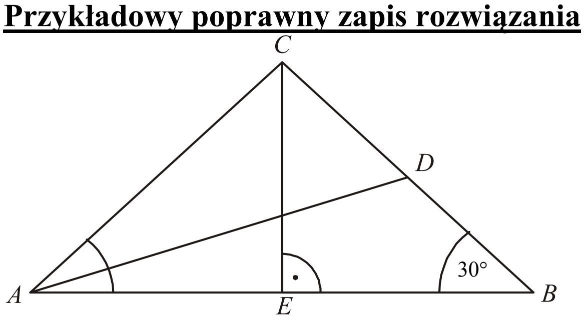
Podstawa *AB* trójkąta równoramiennego *ABC* ma długość 8 oraz $\left|\sphericalangle BAC\right| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej *AD* tego trójkąta.

Sprawdzane umiejętności

Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,54 – umiarkowanie trudne	**0,57**	**0,33**	**0,26**	**0,56**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>



Z treści zadania wynika, że $\left|BD\right| = \dfrac{1}{2}\left|BC\right|$ i $\left|\sphericalangle ABC\right| = 30^\circ$ oraz $\left|BE\right| = 4$.

Z trójkąta prostokątnego *BEC* otrzymujemy: $\cos 30° = \dfrac{|BE|}{|BC|}$.

Zatem $\dfrac{4}{|BC|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|BC| = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ i $|BD| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy $|AD|$, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta *ABD*.

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot \cos\sphericalangle ABD$,

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$|AD|^2 = 64 + \dfrac{16}{3} - 32 = \dfrac{16 \cdot 7}{3}$.

Stąd $|AD| = 4\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{21}$.

Przydział punktów za rozwiązanie

W schemacie oceniania uznano, że zdający **pokonał zasadnicze trudności zadania** i otrzymywał **3 punkty**, jeżeli zapisał poprawnie równanie z jedną niewiadomą (długością środkowej AD), wynikające albo z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD lub ADC (trzy pierwsze sposoby rozwiązania) lub twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADF (czwarty sposób rozwiązania).

Ostatni, **czwarty punkt** za rozwiązanie tego zadania, zdający otrzymywał oczywiście za doprowadzenie do końca poprawnych obliczeń długości środkowej AD.

2 punkty przyznawano za **istotny postęp w rozwiązaniu**, za który uznano albo obliczenie długości ramienia trójkąta ABC, albo połowy długości tego ramienia, albo też długości odcinka DF (czwarty sposób rozwiązania).

1 punkt przyznawano za **niewielki postęp w rozwiązaniu**, za który uznano wprowadzenie oznaczeń i obliczenie wysokości CE trójkąta ABC lub długości ramienia tego trójkąta, albo też zapisanie równania z jedną niewiadomą, wynikającego z twierdzenia cosinusów zastosowanego w trójkącie, lub też (jak w czwartym sposobie rozwiązania) obliczenie długości odcinka FB stanowiącego wysokość trójkąta równobocznego o boku BD.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Maturzyści, w większości, nieźle poradzili sobie z ustaleniem zależności między podanymi w zadaniu informacjami. Wykazali się przy tym umiejętnością zaplanowania kolejności wykonywanych obliczeń oraz prawidłowym dobieraniem twierdzeń z zakresu geometrii, które były potrzebne do rozwiązania problemu.

Wśród błędów, które popełnili, na czoło wysuwają się błędy rachunkowe popełniane w trakcie obliczeń (działania na ułamkach zwykłych, działania na liczbach niewymiernych, pierwiastkowanie wyrażeń algebraicznych). Część zdających miała kłopoty z podaniem wartości $\cos 120°$, przy czym kłopoty dotyczyły nie tylko znaku tej liczby, ale też stosowania wzoru, na przykład na cosinus sumy kątów.

Wspomnieć jednak trzeba o dwóch poważnych błędach w pracach niektórych zdających. Obydwa dotyczyły pojęcia środkowej trójkąta. Część zdających to pojęcie utożsamiła z dwusieczną kąta BAC, inni zaś środkową AD utożsamili z wysokością tego trójkąta poprowadzona do ramienia BC. Byli też i tacy, którzy błędnie interpretowali pojęcie środkowej trójkąta. U nich był to odcinek łączący wierzchołek A z punktem D – środkiem ciężkości trójkąta ABC.

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

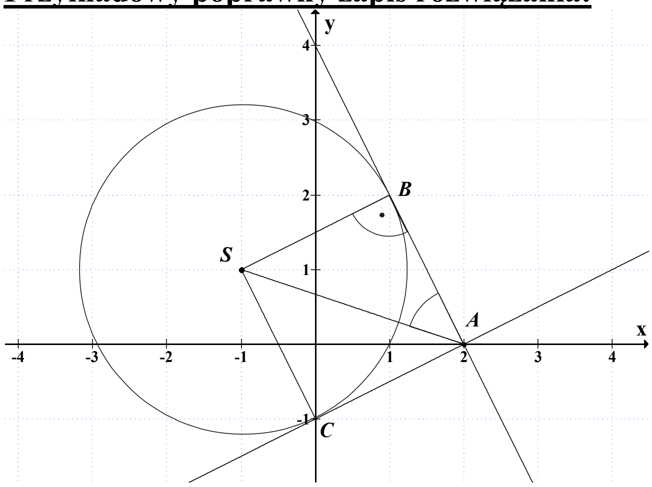
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2, 0)$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,39 – trudne	**0,42**	**0,00**	**0,14**	**0,40**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S = (-1, 1)$, $r = \sqrt{5}$.

Wykonujemy rysunek, na którym zaznaczamy okrąg o środku $S = (-1, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ oraz punkt $A = (2, 0)$.

$|SB| = \sqrt{5}$

$|SA| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

$\sin|\angle SAB| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$**,** stąd $|\angle SAB| = 45°$ czyli $|\angle BAC| = 90°$.

Przydział punktów za rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na obliczeniu promienia okręgu: $|SB| = \sqrt{5}$ i obliczeniu długości odcinka SA: $|SA| = \sqrt{10}$ – zdający otrzymywał **1 punkt**..

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na obliczeniu $\sin|\angle SAB| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub obliczeniu $|AB| = \sqrt{5}$ (lub $|AC| = \sqrt{5}$), lub zapisaniu $|SA| = |SB|\sqrt{2}$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na obliczeniu miary kąta BAC: $|\angle BAC| = 90°$ lub zapisaniu, że kąt BAC jest prosty – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:

Zadanie sprawdzało umiejętność wykorzystania zależności pomiędzy okręgiem i prostą do niego styczną na płaszczyźnie kartezjańskiej. W schemacie oceniania podano cztery sposoby rozwiązania. Pierwszy, parametryczny, rzadko stosowany przez maturzystów, polegał na wykorzystaniu faktu, że okrąg i prosta do niego styczna przechodząca przez punkt $A = (2, 0)$ mają dokładnie jeden punkt wspólny. Wystarczyło więc zapisać, że układ równań

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$ (gdzie a, to współczynnik kierunkowy prostej) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Maturzysta pokonał zasadnicze trudności, gdy doprowadził układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą x i parametrem a. Zazwyczaj równanie to było przez zdających wyznaczone bezbłędnie. Poprawnie, również zapisywali warunek rozwiązalności tego równania $\Delta = 0$. Zdarzały się błędy w wyznaczeniu Δ (delta) lub zdający nie poradzili sobie z przekształceniami po jej poprawnym wyznaczeniu i na tym etapie kończyli rozwiązanie zadania.

Drugi sposób rozwiązania zawarty w schemacie oceniania był najczęściej stosowany przez maturzystów. Polegał, na wykorzystaniu faktu, że długość promienia okręgu jest równa odległości środka okręgu od prostej stycznej do danego okręgu. Zdający musiał zapisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (2, 0)$, a następnie wyznaczyć odległość tej prostej od środka podanego w zadaniu okręgu. Maturzysta pokonał zasadnicze trudności zadania, gdy porównał te dwie wielkości, zapisując równość $\sqrt{5} = \frac{|-3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$. Najczęściej zdający popełniali błędy w przekształcaniu tej równości, po podniesieniu obustronnie do kwadratu otrzymywali, np. $5 = \frac{(-3a-1)^2}{|a+1|}$.

Zdarzało się, że zdający źle wyznaczyli współrzędne środka okręgu lub błędnie wyznaczyli równanie prostej stycznej do okręgu i nie potrafili obliczyć kąta między błędnie wyznaczonymi prostymi. Często maturzyści po poprawnym wyznaczeniu równań prostych stycznych do okręgu dalej nie zauważali, że proste te są prostopadłe.

Zadanie 8. ***(4 pkt)***
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w graniastosłupie, wyznaczenie największej wartości funkcji (standard III – Modelowanie matematyczne).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,55 – umiarkowanie trudne	**0,59**	**0,42**	**0,25**	**0,55**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania</u>
Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa,
h – długość krawędzi bocznej graniastosłupa.
Z tego, że suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 24, mamy $12a + 6h = 24$.

Wyznaczamy jedną ze zmiennych: $h = 4 - 2a$ lub $a = 2 - \frac{h}{2}$.

Pole P powierzchni bocznej jest równe $P = 6ah$ dla $a \in (0, 2)$ oraz $h \in (0, 4)$.

Aby wyznaczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe,
- zapisujemy funkcję P w zależności od zmiennej a
  $P(a) = 6a(4 - 2a)$, $P(a) = -12a^2 + 24a$.

Pole P ma największą wartość, gdy $a=1$.

albo

- zapisujemy funkcję P w zależności od zmiennej h

$$P(h)=6h\left(2-\frac{h}{2}\right),\ P(h)=-3h^2+12h.$$

Pole P ma największą wartość, gdy $h=2$. Zatem $a=1$.

Przydział punktów za rozwiązanie

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, polegało na wprowadzeniu oznaczeń i zapisaniu, że $12a+6h=24$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na zapisaniu pola P powierzchni bocznej graniastosłupa oraz wyznaczeniu a lub h w zależności od jednej zmiennej, np.: $P=6ah$ oraz $a=2-\frac{h}{2}$ lub $h=4-2a$ – zdający otrzymywał **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu pola powierzchni bocznej w zależności od jednej zmiennej.: $P(a)=6a(4-2a)$ lub $P(h)=6h\left(2-\frac{h}{2}\right)$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na obliczeniu długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe: $a=1$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Komentarz:

Błędy występowały już na etapie wprowadzenia oznaczeń, maturzyści zapisywali, np. $12a+6h=24$, ale przyjmowali, że pole powierzchni bocznej graniastosłupa wyraża się wzorem $P=ah$. I nic nie pisali o zależności między polem jednej ściany a polem powierzchni bocznej graniastosłupa. Pojawiały się też błędy przy zapisaniu pola P powierzchni bocznej graniastosłupa w zależności od jednej zmiennej. Zdający nie potrafili poprawnie przekształcić wyrażenia algebraicznego, popełniali błędy rachunkowe.

Zdający, którzy poprawnie zapisali pole jako funkcję zmiennej a lub h z reguły nie mieli kłopotów z rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego.

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

Sprawdzane umiejętności:

Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,19 – bardzo trudne	**0,23**	**0,09**	**0,00**	**0,10**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Wybieramy miejsce dla dwójek. Jest $\binom{8}{2}=28$ takich miejsc.

Wybieramy miejsce dla trójek. Jest $\binom{6}{3}=20$ takich miejsc.

Na pozostałych trzech miejscach mogą wystąpić cyfry: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jest 7^3 ciągów trójelementowych ze zbioru siedmioelementowego.

Zatem jest $28\cdot 20\cdot 7^3=4^2\cdot 5\cdot 7^4=192080$ liczb spełniających warunki zadania.

Przydział punktów za rozwiązanie: **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania,** polegało na obliczeniu liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki, albo obliczeniu liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki, albo obliczeniu, na ile sposobów można zapełnić trzy pozostałe miejsca – zdający otrzymywał **1 punkt**. **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** polegało na obliczeniu obu wielkości: liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki – zdający otrzymywał **3 punkty**. **Rozwiązanie pełne** polegało na obliczeniu liczby ciągów na pozostałych miejscach, skorzystanie z reguły mnożenia i obliczenie, że jest 192080 szukanych liczb i za to zdający otrzymywał **4 punkty**.
Komentarz: Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne. Maturzysta pokonał zasadnicze trudności, gdy obliczył liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i liczbę miejsc, na których mogą znajdować się trójki. Zadanie rzadko było rozwiązane poprawnie, często nie było w ogóle rozpoczęte. Wskaźnik łatwości zadania wyniósł 0,16, więc zadanie było bardzo trudne. O błędnej interpretacji zadania przez zdających świadczą zapisy, np. $V_8^2 \cdot V_8^3 \cdot V_5^7$ lub $C_8^5 \cdot C_8^3 \cdot 7^3$, lub $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8!$ Wśród rozwiązań maturzystów można było zauważyć zapisy świadczące o braku umiejętności stosowania reguły mnożenia, np. $\binom{8}{3}+\binom{5}{2}+7^3$. Czasami zdający przyjmowali, że w zapisie liczby ośmiocyfrowej, dwójki i trójki znajdują się w kolejności 22333…, co jest oczywiście błędną interpretacją zadania. Rzadko zdarzały się rozwiązania, w których zdający błędnie założył, że pozostałe cyfry „są różne”, natomiast poprawnie obliczył liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i trójki, zapisując $\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Zazwyczaj zdający potrafili poprawnie obliczyć liczbę możliwości rozmieszczenia cyfr innych niż dwójka i trójka. Zdarzały się również nietypowe poprawne rozwiązania tego zadania. Zdający założył, że na pierwszym miejscu liczby ośmiocyfrowej znajduje się dwójka i obliczył, że pozostałe cyfry może rozmieścić na $\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{3}\cdot 7^3$ sposobów, następnie założył, że na pierwszym miejscu znajduje się trójka i obliczył, że takich przypadków jest $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 7^3$. Trzecia możliwość, to na pierwszym miejscu znajduje się jedna z cyfr, ze zbioru $\{1, 4, 5, ..., 9\}$ i obliczył, że jest $7\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot 7^2$ możliwości ustawienia pozostałych cyfr. Suma tych trzech przypadków jest rozwiązaniem zadania.

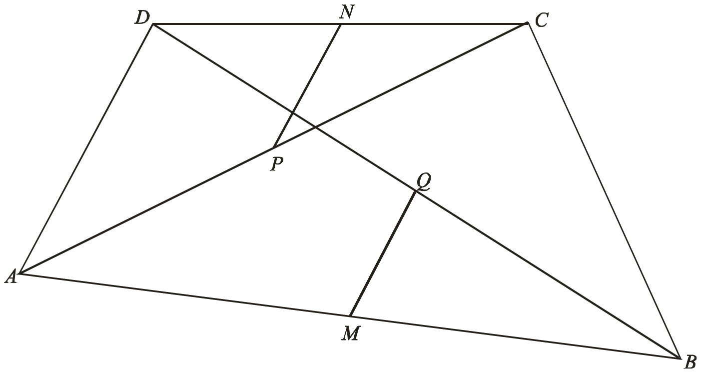
Zadanie 10. ***(3 pkt)***

Dany jest czworokąt wypukły *ABCD* niebędący równoległobokiem. Punkty *M*, *N* są odpowiednio środkami boków *AB* i *CD*. Punkty *P*, *Q* są odpowiednio środkami przekątnych *AC* i *BD*. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

Sprawdzane umiejętności
Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich (standard V – Rozumowanie i argumentacja).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,15 – bardzo trudne	**0,17**	**0,00**	**0,04**	**0,17**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Ponieważ punkty *N* i *P* są środkami boków *DC* i *AC* trójkąta *ADC*, więc $NP \parallel AD$.
Punkty *M* i *Q* są środkami boków *AB* i *DB* trójkąta *ABD*, więc $MQ \parallel AD$.
Zatem $NP \parallel MQ$.

Przydział punktów za rozwiązanie:
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, polegało na zapisaniu, że**:** $NP \parallel AD$ lub $MQ \parallel AD$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu i uzasadnieniu, że $NP \parallel AD$ oraz $MQ \parallel AD$ – zdający otrzymywał **2 punkty**.
Rozwiązanie pełne polegało na zapisaniu wniosku, że $NP \parallel MQ$ – zdający otrzymywał **3 punkt**.

Komentarz:

Maturzyści rzadko podejmowali próbę rozwiązania tego zadania.

Zadanie z planimetrii, sprawdzało, czy maturzysta potrafi przeprowadzić proste rozumowanie i je uzasadnić.

Należało, uzasadnić, że odcinki *NP* oraz *MQ* są równoległe. Zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, gdy zauważył, że $NP \parallel AD$, ponieważ punkty *N* oraz *P* są środkami odpowiednio boków *DC* oraz *AC* trójkąta *ADC* i $MQ \parallel AD$, bo punkty *M* oraz *Q* są środkami odpowiednio boków *AB* oraz *DB* trójkąta *ABD*. Zdający musiał uzasadnić równoległość tych odcinków, powołując się na twierdzenie dotyczące odcinków łączących środki dwóch boków trójkąta. Niestety, większość zdających, którzy podejmowali próbę rozwiązania, nie znała tego twierdzenia, a jeżeli znała, tonie potrafiła go wykorzystać. Najczęściej równoległość odcinków *MQ* i *PN*, maturzyści uzasadniali z podobieństwa trójkątów: *ABD* i *MBQ* oraz *ADC* i *NCP* na podstawie cechy kkk. Oczywiście równoległość nie jest niezmiennikiem podobieństwa, więc uzasadnienie było błędne. Część zdających, zakładała, że dwa boki tego czworokąta są równoległe, co było sprzeczne z treścią zadania.

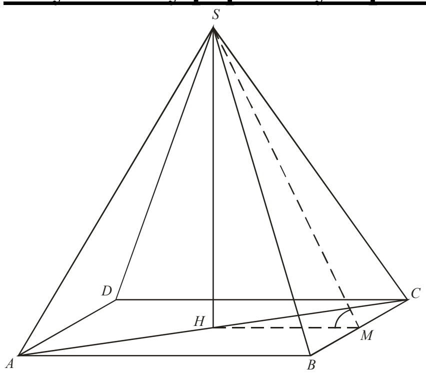
Nieliczni maturzyści rozwiązali zadanie korzystając, z rachunku wektorów. Wykorzystali fakt, że $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ oraz $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, to $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ}$. Na podstawie równości wektorów stwierdzali, że odcinki *PN* oraz *MQ* są równoległe. Również nietypowym rozwiązaniem było wykorzystanie metod geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Sposób rozwiązania był oczywiście poprawny, lecz bardzo pracochłonny.

Zadanie 11. ***(6 pkt)***

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS* o podstawie *ABCD*. W trójkącie równoramiennym *ASC* stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC|:|AS| = 6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Sprawdzane umiejętności Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).				
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,61 – umiarkowanie trudne	**0,64**	**0,44**	**0,38**	**0,63**

<u>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</u>



Wprowadzamy oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = 5x$. Ponieważ $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$ stąd $|AH| = 3x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CHS* otrzymujemy: $|SH| = \sqrt{|CS|^2 - |HC|^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x$.

Ponieważ $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$, stąd $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$.

Zatem $|CM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x}{\sqrt{2}} = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *MCS* otrzymujemy $|SM|^2 = |CS|^2 - |CM|^2$.

Stąd $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{50-9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2}$, $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$.

Zatem $\sin\alpha = \frac{|SH|}{|SM|} = \frac{4x}{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

<u>Przydział punktów za rozwiązanie:</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało na wyznaczeniu $|AH| = 3x$ i $|SH| = 4x$ przy przyjętych oznaczeniach, np.: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = |CS| = 5x$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, polegało na wyznaczeniu długości *BC*: $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ lub $|BC| = 3x\sqrt{2}$ i wyznaczeniu długości *CM*: $|CM| = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$ lub

$\left|CM\right| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na wyznaczeniu długości *SM*: $\left|SM\right| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$ lub $\left|SM\right| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$ – zdający otrzymywał **4 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe), zdający otrzymywał 5 punktów

Rozwiązanie pełne polegało na wyznaczeniu sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$ – zdający otrzymywał **6 punktów**.

Komentarz:

Przedostatnie, jedenaste zadanie w arkuszu, badało umiejętność zbudowania i zrealizowania strategii rozwiązania dość typowego problemu ze stereometrii. Zadania okazało się umiarkowanie trudne dla ogółu zdających – skuteczność zdających zmierzona wskaźnikiem łatwości jest równa $0,66$.

Zdający w większości poprawnie rozpoznali zależności pomiędzy informacjami podanymi w treści zadania, prawidłowo zaplanowali kolejność obliczeń i dobrze dobrali potrzebne definicje oraz twierdzenia.

W rozwiązaniach zdający najczęściej popełniali błędy rachunkowe, a ponieważ rozwiązanie zadania składało się z kilku etapów, więc błędy były popełniane czasem kilkukrotnie. Błędy te były popełniane już przy przekształcaniu podanego stosunku długości odcinków, przy wyznaczaniu długości boku kwadratu z wzoru na przekątną kwadratu, podczas wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych, w których współczynnikami były liczby wymierne oraz liczby niewymierne, a także w końcowych obliczeniach sinusa podanego kąta. Można było także zaobserwować pewną beztroskę przy stosowaniu rachunków przybliżonych i zamienne stosowanie znaków „$=$” oraz „$\approx$”.

Martwią błędy merytoryczne. Niemało było zdających, którzy przez kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa rozumieli kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Obliczenia w tym przypadku mocno się upraszczają.

Nieco inny typ błędu popełniali ci zdający, którzy zamiast kwadratu *ABCD* rozważali kwadrat *ABDC* – oznaczali wierzchołki kwadratu, nie zachowując ich kolejności. Skutek był taki, że podany w treści zadania stosunek $\left|AC\right| : \left|AS\right|$ dotyczył ściany bocznej, a nie przekroju ostrosłupa, zaś obliczenia znacznie się upraszczają.

Trzeba wreszcie wspomnieć też o grupie zdających, którzy nie poradzili sobie z poprawną interpretacją podanego w treści zadania stosunku $\left|AC\right| : \left|AS\right|$. Nie można powiedzieć, że wykazali się znajomością strategii rozwiązania tego problemu, dlatego że obliczony przez nich sinus kąta był funkcją dwóch zmiennych, nie przyjmował zatem wartości liczbowej.

Zadanie 12. ***(3 pkt)***

A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,9$ i $P(B)=0,7$, to $P(A\cap B')\le 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).

Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń (standard IV – Użycie i tworzenie strategii).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	Wskaźnik łatwości według typu szkoły			
	LO	**LP**	**LU**	**T**
0,47 – trudne	**0,49**	**0,33**	**0,32**	**0,48**

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z faktu, że $A\cap B'\subset B'$ wynika, że $P(A\cap B')\le P(B')$.

Ponieważ $P(B)=0,7$, więc $P(B')=0,3$. Stąd wynika, że $P(A\cap B')\le P(B')=0,3$.

Przydział punktów za rozwiązanie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania, polegało na obliczeniu $P(B')$: $P(B')=0,3$ – zdający otrzymywał **1 punkt**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania polegało na zapisaniu lub wykorzystaniu faktu, że $A\cap B'\subset B'$ – zdający otrzymywał **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne polegało na zapisaniu wniosku: $P(A\cap B')\le 0,3$ – zdający otrzymywał **3 punkty**.

Komentarz:

W większości prób rozwiązań tego zadania zdający uzyskiwali tylko 1 punkt za wyznaczenie wartości $P(B')=0,3$. Dalsze etapy rozwiązań prowadziły do błędnych lub nieuzasadnionych wniosków. Dostrzeżenie faktu, że $A\cap B'\subset B'$ i wyciągnięcie wniosku dotyczącego prawdopodobieństw tych zdarzeń przekraczało możliwości zdecydowanej większości zdających, o czym świadczy współczynnik łatwości zadania.

Najczęściej powtarzające się błędy

- Najczęściej zdający wyznaczali najpierw wartość $P(B')=0,3$. Następnie, wykorzystując własność dotyczącą prawdopodobieństwa sumy zdarzeń A i B': $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$, podstawiali wartości dane w treści zadania i obliczali $P(A\cup B')=1,2-P(A\cap B')$. Korzystając z własności $0\le P(A)\le 1$, stwierdzali, że $P(A\cap B')\le 0,2$, a tym samym $P(A\cap B')\le 0,3$.

5 Podsumowanie i wnioski

Wyniki egzaminu maturalnego świadczą o tym, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności lub zadania podobne do tych, które występowały na poprzednich egzaminach, włącznie z egzaminem próbnym. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych (standardy: IV – *Użycie i tworzenie strategii* oraz V – *Rozumowanie i argumentacja*), większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania.

Duży procent opuszczeń wystąpił w zadaniach na dowodzenie.
Poziom podstawowy: zadanie 25. –25%, zadanie 28. – 20%, zadanie 33. – 30%.
Poziom rozszerzony: zadanie 8. – 5%, zadanie 10. – 6% zadanie 12. – 4,5%.

W pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń i błędy rachunkowe.

Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki poprzedzone było szeroką akcją informacyjną skierowaną do uczniów i nauczycieli. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym,* a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE po próbnych egzaminach maturalnych. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych.

W pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2012 warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:
− strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
− tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
− rozumienie pojęć (a nie opieranie się w rozwiązaniu na znanych algorytmach),
− dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
− argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
− czytelne zapisywanie toku myślenia,
− sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.